frekvence. Jestliže frekvence vynuceného kmitání je vyšší než základní vlastní frekvence, pak je nezbytné určit i vyšší vlastní frekvence.

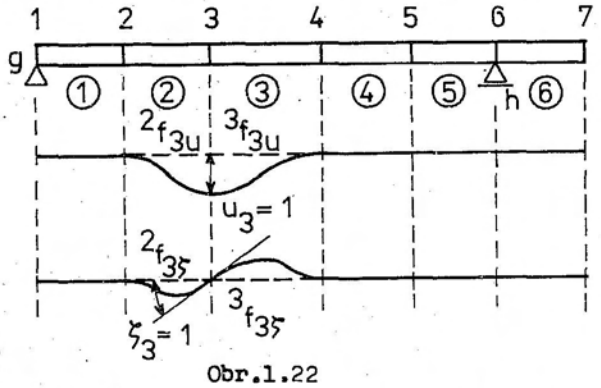
1.2.2. Soustavy se spojitě rozdělenými parametry

Pružný nosník (obr.1.1, obr.1.20) se spojitě rozdělenou hmotou je soustavou se spojitě rozdělenými parametry, která má nekonečný počet stupňů volnosti. Rovněž tak rámová konstrukce se spojitě rozdělenou hmotou (obr.1.21) je soustavou s nekonečným počtem stupňů volnosti. Protože mají hmotu spojitě rozdělenou podél délky jejich prutů, musí být přemístění a zrychlení definována v každém bodě prutu jestliže máme určit všechny setrvačné síly. V tomto případě k řešení píšeme parciální diferenciální rovnice, protože poloha podél délky prutu právě jako čas musí být uvažovány jako nezávisle proměnné.

Ovšem i u soustav se spojitě rozdělenými parametry při jejich řešení omezujeme počet stupňů volnosti. Tento přístup je založen na předpokladu, že výsledný průhyb kmitající soustavy se spojitě rozdělenými parametry lze vyjádřit konečným počtem funkcí podle (1.2), případně (1.3). Tím dojdeme opět k řešení soustavy s konečným počtem stupňů volnosti, neboť počet uvažovaných funkcí tvarů představuje počet stupňů volnosti při tomto způsobu idealizace dynamické úlohy. Dosahujeme zde přesnějších výsledků než při užití diskrétních výpočtových modelů.

1.2.3. Metoda konečných prvků

Třetí metoda při vytváření výpočtového modelu k určení přemístění dané konstrukce pomocí konečného počtu diskretních souřadnic přemístění kombinuje určité rysy obou předchozích metod. Nazýváme ji metodou konečných prvků a je vhodná k řešení jak prutů, tak rovinných i prostorových konstrukcí.

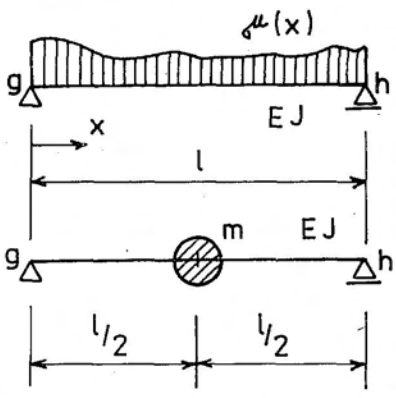


Obr.1.22

Prvním krokem při idealizaci konstrukce metodou konečných prvků je její rozdělení na přiměřený počet částí elementů (obr.1.7). Konce prvků, v kterých jsou vzájemně propojeny, nazýváme uzly. Přemístění těchto uzlů jsou vlastně speciální zobecněné souřadnice konstrukce. Přemístění celé konstrukce můžeme vyjádřit těmito zobecněnými souřadnicemi pomocí vhodného souboru předpokládaných funkcí přemístění podobných výrazů v rov.(1.2). Nazýváme je interpolační funkce, protože aproximují tvar přemístění mezi přesně určenými přemístěními uzlů. Na obr.1.22 jsou např. znázorněny interpolační funkce sdružené se dvěma stupni volnosti třetího uzlu. Jsou to v podstatě křivky, které jsou spojité a které splňují geometrické podmínky přemístění předepsané uzlovými přemístěními. U jednorozměrných prvků je vhodné užívat interpolační funkce ve tvarech přemístění vyvolaných v nich přemístěními uzlů jako na vetknutém nosníku.

Příklad 1.1: Určete velikost hmotnosti náhradné soustředěné hmoty uprostřed prostého nosníku rozpětí l, tuhosti EJ, se spojitě rozdělenou hmotou o hmotnosti $\mu(x)$ na jednotku rozpětí, který budeme řešit jako soustavu s jedním stupněm volnosti (obr.1.23).

Nosník s rovnoměrně rozdělenou hmotou nahrazujeme zde nehmotným nosníkem s jednou soustředěnou hmotou uprostřed rozpětí. Vyjdeme z podmínky rovnosti kinetických



Obr.1.23

energií nosníku s rovnoměrně rozdělenou hmotou a nosníku se soustředěnou hmotou uprostřed rozpětí. Platí

$$E_{k\mu} = E_{ks}.$$

Předpokládejme, že kmitání nosníku je popsáno vztahem

$$v(x,t) = v(x)f(t)$$

a rychlost kmitání

$$\dot{v}(x,t) = v(x)\dot{f}(t),$$

kde $v(x)$ je tvar kmitání. Kinetická či pohybová energie je dána jednou polovinou hmoty násobenou kvadrátem rychlosti pohybu [5] . Takže pro soustředěnou hmotu uprostřed rozpětí nosníku, kdy $x = \frac{l}{2}$, platí

$$E_{ks} = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 \left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{l}{2}\right) \left(\dot{f}(t)\right)^2.$$

Použijeme-li tento vztah na element nosníku s rovnoměrně rozdělenou hmotou μ , vyjde pro kinetickou energii elementu

$$dF_{k\mu} = \frac{1}{2}\mu(x)dx\, \dot{v}^2(x,t) = \frac{1}{2}\mu(x)\, dx\, v^2(x)\left(\dot{f}(t)\right)^2.$$

Integrací obdržíme kinetickou energii celého nosníku s rovnoměrně rozdělenou hmotou

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x) v^2(x) \left(\dot{f}(t)\right)^2 dx.$$

Z rovnosti kinetických energií $E_{ks} = E_{k\mu}$ obdržíme $\quad m = \dfrac{\int_0^l \mu(x)\, v^2 dx}{v^2\left(\frac{l}{2}\right)}$.

Předpokládejme, že tvar kmitání nosníku s rovnoměrně rozdělenou hmotou μ je popsán vztahem $v(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$. Potom platí

$$E_{ks} = \frac{1}{2} m \sin^2 \frac{\pi \frac{l}{2}}{l} \left(\dot{f}(t)\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{f}(t)\right)^2,$$

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \sin^2 \frac{\pi x}{l} \left(\dot{f}(t)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{f}(t)\right)^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin 2\frac{\pi x}{l}\right]_0^l =$$

$$= \frac{1}{2}\mu \left(\dot{f}(t)\right)^2 \left(\frac{1}{2}l - \frac{l}{4\pi}\sin 2\pi\right) = \frac{1}{4}\mu l \left(\dot{f}(t)\right)^2.$$

Z rovnosti kinetických energií $\frac{1}{2} m \left(\dot{f}(t)\right)^2 = \frac{1}{4}\mu l \left(\dot{f}(t)\right)^2$ vyjde velikost hmotnosti soustředěné hmoty uprostřed nehmotného nosníku $m = \frac{1}{2}\mu l$. Tento výsledek odpovídá rozdělení hmoty nosníku na dvě části (obr.1.7) a soustředění na hranicích dílků.

Předpokládejme nyní kmitání nosníku ve tvaru průhybové čáry od osamělé síly F uprostřed rozpětí [3]

$$v(x) = \frac{Fx}{4EJ}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) = \frac{F}{4EJ}\left(\frac{l^2 x}{4} - \frac{x^3}{3}\right).$$

Při vyjádření v závislosti na průhybu uprostřed $v_s = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F l^3}{48EJ}$ dostaneme

$$v(x) = \frac{F l^3}{48EJ}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right) = v_s\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Rychlost přemístění libovolného bodu nosníku obdržíme, derivujeme-li rovnici průhybu podle času $\dot{v}(x) = \dfrac{dv(x)}{dt} = \left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)\dfrac{dv_s}{dt} = \left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)\dot{v}_s.$

Kinetická energie elementu nosníku v místě x je

$$dE_{k\mu} = \frac{1}{2} dm\, \dot{v}^2(x) = \frac{1}{2}\mu\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)^2 \dot{v}_s^2\, dx,$$

a kinetická energie celého nosníku s rovnoměrně rozdělenou hmotou je

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2}\mu \dot{v}_s^2 2\int_0^{l/2}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \mu \dot{v}_s^2 \left(\frac{3}{8}l - \frac{3}{20}l + \frac{1}{56}l\right) = \frac{17}{70}\mu l \dot{v}_s^2.$$

Kinetická energie náhradné soustavy se soustředěnou hmotou uprostřed rozpětí je dána vztahem $\quad E_{ks} = \frac{1}{2} m v_s^2$.

Z rovnosti kinetických energií vychází velikost soustředěné hmoty

$$m = \frac{17}{35}\mu l = 0{,}4857\,\mu l = \frac{1}{2}\mu l .$$

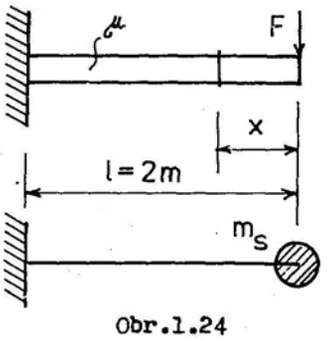
Přijmeme-li o kmitání nosníku předpoklad, že průhybová čára má tvar kvadratické paraboly $v(x) = v_s \frac{4}{l^2}(l - x)\,x$,

postupně dostaneme $\dot{v}(x) = \frac{4}{l^2}(l - x)\,x\,\dot{v}_s$,

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2}\mu\,\dot{v}_s^2 \int_0^l \frac{16x^2}{l^4}(l - x)^2 dx = \frac{8}{30}\mu l\,\dot{v}_s^2 .$$

Takže velikost hmotnosti náhradné soustředěné hmoty je $m = \frac{8}{15}\mu l = 0{,}533\,\mu l \doteq \frac{1}{2}\mu l$. Vidíme, že rozdíl výsledků ve všech třech případech není veliký.

Příklad 1.2: Určete velikost hmotnosti náhradné soustředěné hmoty na volném konci konsoly délky $l = 2$m, se spojitě rovnoměrně rozdělenou hmotou (obr.1.24). Konsola má obdélníkový průřez 20.12 cm, objemová tíha materiálu je $\gamma = 7000\ \mathrm{Nm}^{-3}$, modul pružnosti $E = 15$ MPa.



Obr.1.24

Průhybová čára konsoly od zatížení osamělým břemenem na volném konci je dána vztahem [3]

$$EJ\,v(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - l^2\frac{x}{2} + \frac{l^3}{3}\right)$$

a průhyb v místě soustředěné hmoty $EJ\,v_s = \frac{1}{3}F l^3$. Vyjádříme průhybovou čáru konsoly v závislosti na průhybu volného konce

$$EJ\,v(x) = \frac{1}{3}F l^3\left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right) = EJ\,v_s\left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right),$$

čili $$v(x) = v_s\left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right).$$

Derivujeme-li podle času, obdržíme rychlost přemístění libovolného bodu konsoly

$$\dot{v}(x) = \left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right)\frac{dv_s}{dt} = \left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right)\dot{v}_s .$$

Kinetická energie elementu konsoly ve vzdálenosti x od volného konce je

$$dE_{k\mu} = \frac{1}{2}dm\,\dot{v}^2(x) = \frac{1}{2}\mu\,dx\left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right)^2\dot{v}_s^2$$

a integrací obdržíme kinetickou energii celého nosníku

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2}\mu\,\dot{v}_s^2 \int_0^l \left(\frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x}{2l} + 1\right)^2 dx = \frac{1}{2}\mu l\frac{33}{140}\dot{v}_s^2 .$$

Kinetická energie náhradné soustředěné hmoty je

$$E_{ks} = \frac{1}{2}m_s\,\dot{v}_s^2 .$$

Z rovnosti kinetických energií $\frac{1}{2}m_s\dot{v}_s^2 = \frac{1}{2}\mu l\frac{33}{140}\dot{v}_s^2$ vyjde velikost náhradné soustředěné hmoty

$$m_s = \frac{33}{140}\mu l = \frac{33}{140}\ 0{,}20.0{,}12.700.2 = 7{,}9\ \mathrm{kg}.$$

2. BUDICÍ SÍLY

Budicí síly jsou v čase se měnicí vnější síly působící na stavební konstrukci a způsobující její kmitání. Obecně je lze rozdělit na deterministické a stochastické [10]. V tomto skriptu se zabýváme deterministickým kmitáním.

Časový průběh budicí síly po kvalitativní i kvantitativní stránce může být popsán různými charakteristickými údaji [6]:

a) Časová funkce F(t), která matematicky popisuje časový průběh budicí síly, obsahuje kvalitativní i kvantitativní informaci.

b) Okamžitá hodnota $F(t_i)$ určuje velikost budicí síly v určitém čase t_i.

c) Střední hodnota je určena vztahem

$$F = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt, \qquad (2.1.)$$

kde T je u periodického průběhu délka základní periody. U neperiodického průběhu musíme výpočet střední hodnoty budicí síly provést z dostatečně dlouhého úseku jejího časového průběhu, $T \to \infty$.

d) Efektivní hodnota

$$F_{ef} = \sqrt{\left[\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} F^2(t)dt\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)dt\right]} \qquad (2.2)$$

je vždy pozitivní.

e) Maximální hodnota max F je největší vyskytující se nebo očekávaná okamžitá hodnota v daném časovém intervalu (výkmit). U harmonického průběhu je výkmit totožný s amplitudou budicí síly.

f) Frekvenční spektrum příslušné fyzikální veličiny je známé jako Fourierovo spojité frekvenční spektrum [6], a je definováno vztahem

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad (2.3)$$

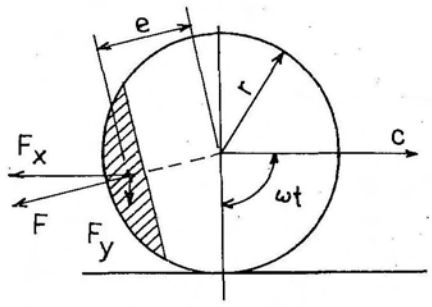
kde $F(i\omega) = \mathcal{F}\,F(t)$ je Fourierův obraz nebo spektrum funkce (předmětu F(t)). Časová funkce budicí síly pak je dána zpětnou Fourierovou transformací

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (2.4)$$

Známá Fourierova řada je zvláštní případ Fourierova spektra. Spektrum obsahuje kvantitativní a kvalitativní informace a můžeme jím nahradit časový průběh budicí síly.

Zatímco údaje uvedené pod body 2 až 5 mají pouze kvantitativní charakter a postrádáme u nich velmi důležité informace jako je časový průběh budicí síly nebo spektrální složení.

Příklad 2.1: Určete jak veliká je svislá a vodorovná harmonická složka odstředivé síly na kole parní lokomotivy, která vzniká pohybem kola s excentricky uloženou hmotou o hmotnosti m = 10 kg. Lokomotiva se pohybuje stálou rychlostí c = 50 km h^{-1}, poloměr kola r = 650 mm, excentricita nevyvážené hmoty e = 500 mm (obr.2.1).



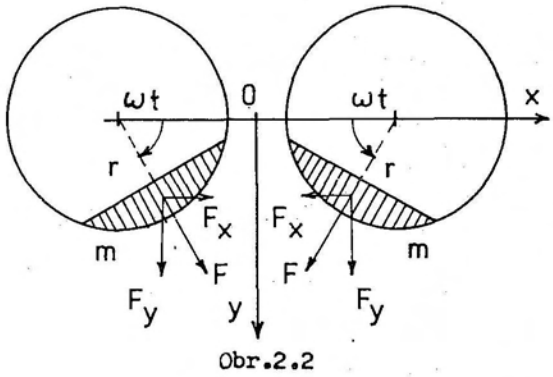
Obr.2.1

Odstředivá síla při úhlové rychlosti $\omega = \frac{c}{r}$ vyjde [5]

$$F_c = me\omega^2 = me\frac{c^2}{r^2} = 10.0{,}5\ \frac{50^2}{3{,}6^2}\ \frac{1}{0{,}65^2} = 2\,283\ \text{N}.$$

Svislá a vodorovná složka odstředivé síly, které jsou harmonickými silami, jsou popsány vztahy

$$F_y(t) = F_c \sin\omega t = 2\,283\ \sin\omega t, \qquad F_x(t) = F_c \cos\omega t = 2\,283\ \cos\omega t.$$



Obr.2.2

Příklad 2.2: Určete silové působení mechanického budiče, skládajícího se ze dvou excentrů protiběžně rotujících (obr. 2.2).

Každý z excentrů má nevyváženou hmotu o hmotnosti m, vzdálenost jejího těžiště od osy otáčení excentru je r. Odstředivá síla jedné rotující nevyvážené hmoty je [5]

$$F_c = m\,r\,\omega^2.$$

V obecném okamžiku t platí

$$F_x(t) = mr\omega^2\cos\omega t, \qquad F_y(t) = mr\omega^2\sin\omega t.$$

Vodorovné složky odstředivé síly obou excentrů se ruší, svislé se skládají. Daný mechanický budič tedy působí svislou silou

$$F(t) = 2F_y(t) = 2F\sin\omega t = 2mr\omega^2\sin\omega t.$$

Příklad 2.3: Vyšetřete mechanismus pístového stroje, který je uložen vodorovně na základu (obr.2.3). Současně určete velikost sil přenášených do základu.

Mechanismus pístového stroje lze zjednodušit na dva hmotné body s hmotností m_1 a m_2. První hmota obíhá kružnici poloměru r a je spojena táhlem délky l s druhou hmotou, která se může pohybovat pouze posuvně směrem osy X. Z obr.2.3 plyne vztah pro přemístění

$$u = l + r - r\cos\psi - l\cos\varphi.$$

Dále podle obr.2.3 platí

$$l\sin\varphi = r\sin\psi,$$

odkud

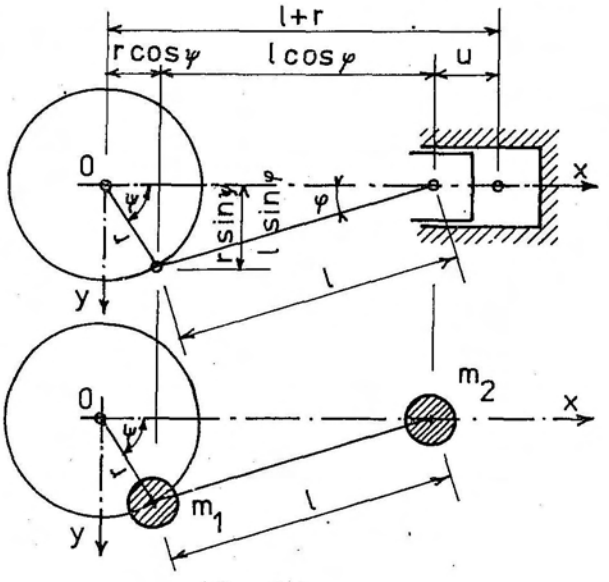
$$\sin\varphi = \frac{r}{l}\sin\psi,$$

tudíž

$$\cos\varphi = \sqrt{(1-\sin^2\varphi)} = \sqrt{(1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\psi)}.$$

Vyjádříme-li odmocninu rozkladem pomocí binomické věty [35]

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}(\frac{r}{l})^2\sin^2\psi - \frac{1}{8}(\frac{r}{l})^4\sin^4\psi - \frac{1}{16}(\frac{r}{l})^6\sin^6\psi - \ldots,$$



Obr.2.3

obdržíme výraz pro přemístění u ve tvaru

$$u = r\left[1 - \cos\psi + \frac{1}{2}(\frac{r}{l})\sin^2\psi + \frac{1}{8}(\frac{r}{l})^3\sin^4\psi + \ldots\right].$$

Přídavné členy obsahující pouze sudé mocniny funkce $\sin\psi$. Pro přibližné vyšetření můžeme dále zanedbat všechny členy obsahující $(\frac{r}{l})$ ve vyšší mocnině než prvé. Takže výraz pro přemístění se zjednoduší na $u = r(1-\cos\psi + \frac{1}{2}\frac{r}{l}\sin^2\psi)$.

Položíme-li $\psi = \omega t$, obdržíme přibližnou rovnici pohybu pístu ve tvaru

$$u(t) = r(1-\cos\omega t + \frac{1}{2}\frac{r}{l}\sin^2\omega t).$$

Rychlost jeho pohybu je vyjádřena rovnicí

$$\dot{u}(t) = r\omega(\sin\omega t + \frac{r}{l}\sin\omega t\cos\omega t) = r\omega(\sin\omega t + \frac{1}{2}\frac{r}{l}\sin 2\omega t)$$

a zrychlení $\ddot{u}(t) = r\omega^2(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t)$.

Maximální zrychlení pístu má hodnotu $\max\ddot{u}(t) = r\omega^2(1+\frac{r}{l})$.

Nyní určíme velikost působících sil na základ. První hmota se pohybuje po kruhové dráze úhlovou rychlostí ω. Působí odstředivou silou $F_c = m_1r\omega^2$, jejíž vodorovná složka je $F_x(t) = F_c\cos\omega t = m_1r\omega^2\cos\omega t$ a svislá složka $F_y(t) = F_c\sin\omega t = m_1r\omega^2\sin\omega t$. Píst o hmotnosti m_2 působí vodorovnou silou

$$F_p(t) = m_2\ddot{u}(t) = m_2r\omega^2(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t).$$

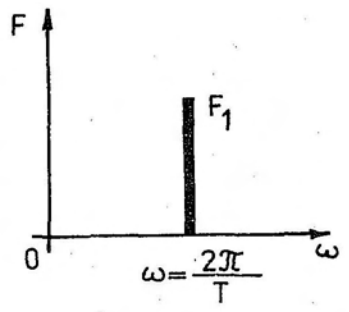
Takže základ pístového stroje je zatížen vodorovnou silou

$$F_{zx}(t) = F_x(t) + F_p(t) = m_1r\omega^2\cos\omega t + m_2r\omega^2(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t)$$

a svislou silou

$$F_{zy}(t) = F_y(t) = m_1r\omega^2\sin\omega t.$$

Příklad 2.4: Určete pro harmonickou budicí sílu $F(t) = F\sin(\omega t+\varphi)$ kvalitativní a kvantitativní charakteristiky.



Obr.2.4

Střední hodnota podle rov.(2.1) vyjde

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F \sin(\omega t+\varphi)\,dt = 0,$$

efektivní hodnota podle (2.2)

$$F_{ef} = \sqrt{\left(\frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)dt\right)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(F\sin(\omega t+\varphi)\right)^2 dt} = \frac{F}{\sqrt{2}},$$

maximální hodnota max F = F.

Amplitudové spektrum určíme v reálném zápise ze vztahu

[10] $F_k = \sqrt{(F_{ck}^2 + F_{sk}^2)}$,

kde

$$\omega_k = k\frac{2\pi}{T} = k\omega,$$

$$F_{ck} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\omega_k t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T F\sin(\omega t+\varphi)\cos\omega_k t\,dt =$$

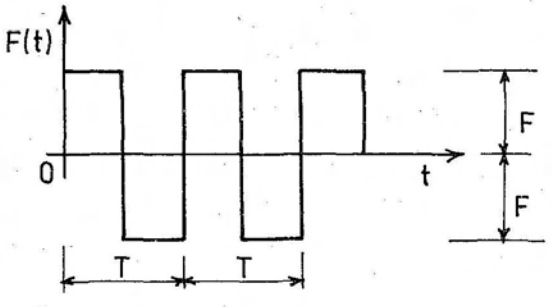
$$= \begin{cases} F\cos\varphi & \text{pro } k = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega = \frac{2\pi}{T}, \\ 0 & \text{pro } k = 2,3,\ldots,\infty, \end{cases}$$

$$F_{sk} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin\omega_k t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T F\sin(\omega t+\varphi)\sin\omega_k t\,dt =$$

$$= \begin{cases} F\sin\varphi & \text{pro } k = 1 \Rightarrow \omega_1 = \omega = \frac{2\pi}{T}, \\ 0. \end{cases}$$

Takže $F_k = \sqrt{(F^2\cos^2\varphi + F^2\sin^2\varphi)} = F$ pro k = 1.

Spektrum harmonicky proměnné síly se skládá z jedné spektrální čáry $F_1 = F$ pro $\omega_1 = \omega = \frac{2\pi}{T}$ (obr.2.4).



Obr.2.5

Příklad 2.5: Určete frekvenční spektrum periodické budicí síly, která je zadána ve tvaru (obr.2.5)

$$F(t) = \begin{cases} F & \text{pro } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F & \text{pro } 0 > t > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Pro Fourierovy koeficienty [8] zde dostaneme

$$F_{ck} = \frac{2.2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F(t)\cos\omega_k t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F\cos\omega_k t\,dt =$$

$$= \frac{4}{T}F\frac{1}{\omega_k}\left[\sin\omega_k t\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0$$

pro k = 0,1,2,3,...,∞,

$$F_{sk} = \frac{2.2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F(t)\sin\omega_k t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F\sin\omega_k t\,dt = \frac{4}{T}F\frac{1}{\omega_k}\left[-\cos\omega_k t\right]_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4F}{k\pi} & \text{pro } k = 1,3,5,\ldots, \\ 0 & \text{pro } k = 0,2,4,\ldots. \end{cases}$$

Amplitudové spektrum určíme ze vztahu

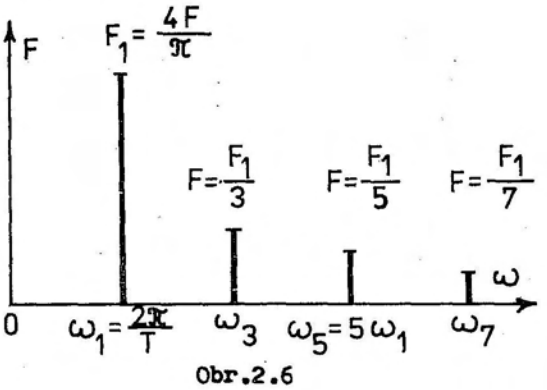
$$F_k = \sqrt{(F_{ck}^2 + F_{sk}^2)} = F_{sk} = \frac{4F}{k\pi} \quad \text{pro } k = 1,3,5,\ldots$$

při $\omega_k = k\frac{2\pi}{T}$, čili $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_3 = 3\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1$

atd. Frekvenční spektrum zadané periodické síly je znázorněno na obr.2.6.

Fourierova řada má potom tvar

$$F(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} F_{sk}\sin\omega_k t = F_1\sin\omega_1 t + F_3\sin\omega_3 t + \ldots = \frac{4F}{\pi}\sin\frac{2\pi}{T}t + \frac{4F}{3\pi}\sin\frac{6\pi}{T}t + \ldots .$$



Obr.2.6

Příklad 2.6: Složte dvě harmonicky proměnné síly $F_1(t) = 4\cos(\omega t+10^0)$ a $F_2(t) = 6\sin(\omega t+60^0)$, kde jejich amplitudy jsou $F_1 = 4N$ a $F_2 = 6N$ a úhlová rychlost obou sil je stejná $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Harmonicky proměnné síly různých směrů se v každém okamžiku skládají jako vektory. Užijeme-li vztahu $\cos\alpha = \sin(\alpha+90^0)$, můžeme sílu $F_1(t)$ vyjádřit pomocí sinu a potom pro součet obou sil platí (obr.2.7)

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = 4\sin(\omega t+100^0) + 6\sin(\omega t+60^0).$$

Z kosinové věty [35] plyne amplituda výsledné síly (rotujícího výsledného vektoru)

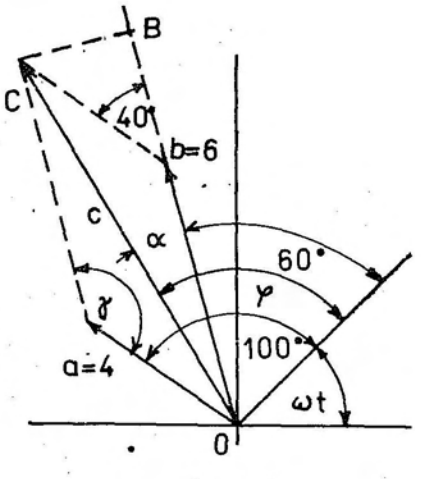
$$F = \sqrt{(F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma)} = \sqrt{(4^2+6^2+2.4.6\cos 40^0)} = \sqrt{88,77} = 9,42N.$$

Úhel α určíme z pravoúhlého trojúhelníka OCB

$$tg\,\alpha = \frac{4\sin 40^0}{6+4\cos 40^0} = 0,284, \quad \text{čili} \quad \alpha = 15^0 51'.$$

Takže výsledná síla je popsána vztahem

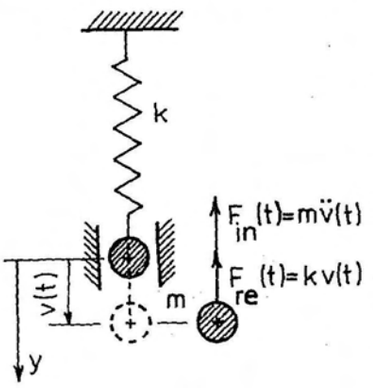
$$F(t) = F\sin(\omega t+\varphi) = 9,42\sin(\omega t + 75^0 51')$$



Obr.2.7

3. SOUSTAVY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

3.1. VLASTNÍ NETLUMENÉ KMITÁNÍ



Obr.3.1

Pohybová rovnice vlastního netlumeného kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti (obr.3.1) získáme při užití d'Alembertova principu ve tvaru

$$m\ddot{v}(t) + k\,v(t) = 0, \qquad (3.1)$$

kde m je hmotnost soustavy, v(t) výchylka a k tuhost.

Tuhost je poměr změny síly a odpovídající změny přemístění pružného prvku soustavy, čili podle obr.3.1 síla, která vznikne v nehmotném péru při jednotkovém vychýlení.

Vedle toho definujeme poddajnost soustavy δ (m.N^{-1}) jako poměr změny přemístění k odpovídající změně síly pružné soustavy. Tuhost k a poddajnost δ jsou v inverzním vztahu, čili platí

$$k = \frac{1}{\delta}, \qquad \delta = \frac{1}{k} \qquad (3.2)$$

Rov.(3.1) vyhovují partikulární řešení

$$v(t) = \sin\omega_o t, \qquad v(t) = \cos\omega_o t, \qquad (3.3)$$

kde

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (s^{-1}) \qquad (3.4)$$

je vlastní kruhová frekvence.

Obecné řešení rov.(3.1) má tvar

$$v(t) = A_o\sin\omega_o t + B_o\cos\omega_o t. \qquad (3.5)$$

Zavedeme-li nové integrační konstanty

$$A_o = v_o\cos\varphi_o, \qquad B_o = v_o\sin\varphi_o, \qquad (3.6)$$

pro které platí

$$v_o = \sqrt{(A_o^2+B_o^2)}, \quad \operatorname{tg}\varphi_o = \frac{B}{A}, \quad \varphi_o = \operatorname{arctg}\frac{B_o}{A_o}, \qquad (3.7)$$

dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$v(t) = v_o\sin(\omega_o t + \varphi_o). \qquad (3.8)$$

Integrační konstanty A_o a B_o, v_o a φ_o v rov. (3.5) a (3.8) určíme z počátečních podmínek pohybu. Integrační konstanta v_o je amplituda kmitání (největší výchylka harmonického kmitání - výkmit) a φ_o je fázová konstanta (úhel fázového posunutí).

Rychlost pohybu je

$$\dot{v}(t) = \omega_o(A_o\cos\omega_o t - B_o\sin\omega_o t) = v_o\omega_o\cos(\omega_o t+\varphi_o) = v_o\omega_o\sin(\omega_o t+\varphi_o+\tfrac{\pi}{2}) \qquad (3.9)$$

a zrychlení

$$\ddot{v}(t) = -\omega_o^2(A_o\sin\omega_o t + B_o\cos\omega_o t) = -v_o\omega_o^2\sin(\omega_o t+\varphi_o) = v_o\omega_o^2\sin(\omega_o t+\varphi_o+\pi). \qquad (3.10)$$

Pohyb popsaný rov.(3.5) a (3.8) je periodický s dobou kmitu (periodou)

$$T_o = \frac{1}{f_o} = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{(m\delta)}, \quad (s) \qquad (3.11)$$

vlastní kruhovou frekvencí

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{G}} = \sqrt{\frac{g}{v_G}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} \quad (s^{-1}) \qquad (3.12)$$

a vlastní frekvencí

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{v_G}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{v_G}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(m\delta)}}, \quad (Hz) \qquad (3.13)$$

kde statický průhyb $$v_G = \frac{G}{k} \qquad (3.14)$$

dosazujeme v m a G je tíha soustředěné hmoty o hmotnosti m v N.

Při zcela obecných počátečních podmínkách pohybu v čase t = 0, tj. výchylka v(0) a rychlost $\dot{v}(0)$ jsou nenulové, vyjdou integrační konstanty

$$v(0) = B_0, \qquad \dot{v}(0) = A_0\omega_0, \qquad (3.15)$$

a pohyb soustavy je popsán rovnicí

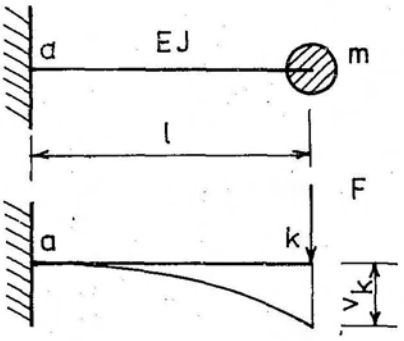
$$v(t) = \frac{\dot{v}(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + v(0)\cos\omega_0 t. \qquad (3.16)$$

Amplituda kmitání je určena vztahem

$$v_0 = \sqrt{\left[(v(0))^2 + \left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega_0}\right)^2\right]} \qquad (3.17)$$

a fázové posunutí

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{v(0)\omega_0}{\dot{v}(0)} \,. \qquad (3.18)$$



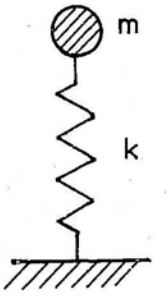
Příklad 3.1: Určete dobu kmitu příčného kmitání konzolového nosníku se soustředěnou hmotou o hmotnosti m na volném konci (obr.3.2). Vlastní hmotu nosníku zanedbejte.

Nejdříve určíme tuhost konsolového nosníku. Když necháme na volném konci místo soustředěné hmoty působit osamělé břemeno F bude pomocí Mohrovy věty [3]

$$v_k = \frac{F l^3}{3EJ}.$$

Jestliže průhyb v_k se bude rovnat jedné, bude osamělé břemeno F tuhostí daného systému o jednom stupni volnosti, čili dosadíme za $v_k = 1$ a za $F = k$

$$1 = \frac{k l^3}{3EJ}, \quad \text{čili} \quad k = \frac{3EJ}{l^3}.$$



Obr.3.2

Doba kmitu potom podle (3.11) bude

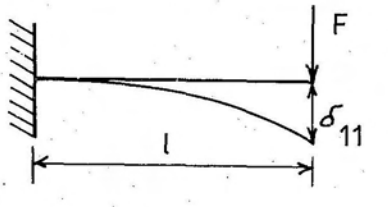
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m l^3}{3EJ}},$$

vlastní frekvence nebo-li kmitočet podle (3.13)

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{m l^3}}.$$

Pro určení poddajnosti necháme v místě soustředěné hmoty na nehmotném konzolovém nosníku působit osamělou sílu F = 1 (obr.3.3). Pořadnice příčinkové čáry průhybu na volném konci v místě působení síly F = 1 má hodnotu [3]

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$



Obr.3.3

Vlastní kruhová frekvence dle (3.12) vyjde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3EJ}{m l^3}},$$

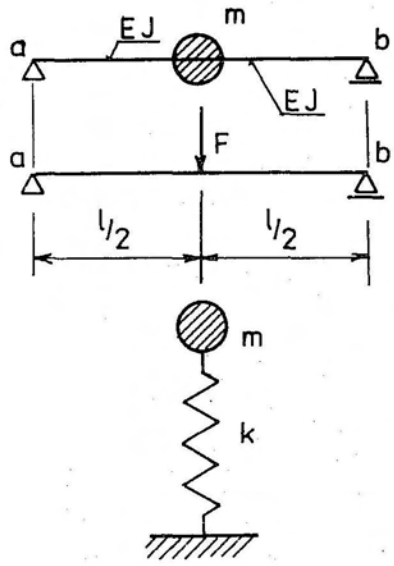
doba kmitu dle (3.11)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{(m\delta_{11})} = 2\pi\sqrt{\frac{m l^3}{3EJ}}$$

a vlastní frekvence dle (3.13)

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(m\delta_{11})}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{m l^3}}.$$

Příklad 3.2: Určete vlastní frekvenci kmitání nehmotného pružného nosníku konstantního průřezu se soustředěnou hmotou tíhy G uprostřed rozpětí (obr.3.4).



Obr.3.4

Průhyb uprostřed nosníku od osamělého břemene F je [3]

$$v_s = \frac{Fl^3}{48EJ}.$$

Položíme-i $v_s = 1$ je $F = k_n$.

Platí

$$1 = \frac{k_n l^3}{48EJ},$$

odkud je tuhost náhradního péra $k_n = \frac{48EJ}{l^3}$.

Doba kmitu je dle (3.11)

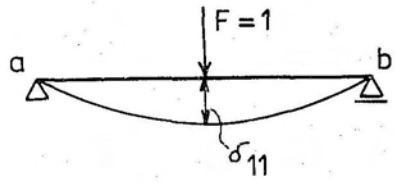
$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_n}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{G}{g}\,\frac{l^3}{48EJ}\right)}$$

a vlastní frekvence dle (3.13)

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{g}{G}\,\frac{48EJ}{l^3}\right)}.$$

Poddajnost nosníku je vlastně pořadnicí příčinkové čáry průhybu uprostřed nosníku (obr.3.5). Ta má hodnotu

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ} = \frac{1}{k}.$$



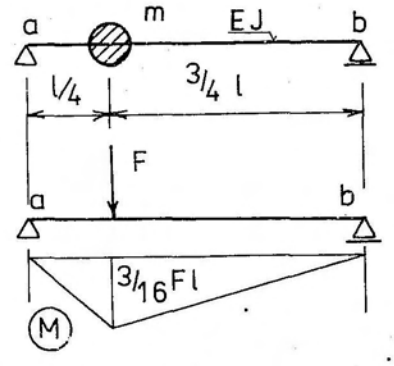
Obr.3.5

Potom vlastní kruhovou frekvenci můžeme vyjádřit jako

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\,\delta_{11}}},$$

což je stejný vztah jako (3.12).

Příklad 3.3: Určete vlastní frekvenci kmitání nehmotného pružného nosníku se soustředěnou hmotou tíhy G = 736 N dle obr.3.6. Nosník je z ocele čtvercového průřezu 4x4 cm, rozpětí l = 1 m.



Obr.3.6

Průhyb od osamělého břemene ve čtvrtině rozpětí určíme pomocí Mohrovy věty [3]

$$v_F = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^2 F l^2 + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,l\left(\frac{3}{4}\right)^2 F l^2\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{16}\right)^2 F l^3 =$$

$$= \frac{3}{256}\,\frac{Fl^3}{EJ}.$$

Položíme-li průhyb $v_F = 1$ je $F = k_n$, vyjde tuhost náhradního péra

$$k_n = \frac{256}{3}\,\frac{EJ}{l^3}.$$

Doba kmitu je podle (3.11)

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_n}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{G}{g}\,\frac{3}{256}\,\frac{l^3}{EJ}\right)}.$$

Vyčíslíme-li

$$T_o = 2\pi\sqrt{\left(\frac{736}{9{,}81}\,\frac{1}{256}\,\frac{1^3}{210.10^9 .21{,}3.10^{-8}}\right)} = 0{,}089\,\text{s}.$$

Vlastní frekvence pak je podle (3.13)

$$f_o = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{0{,}089} = 11{,}2\ \text{Hz}.$$

Příklad 3.4: Určete dobu kmitu hmotného bodu o tíze G = 400 N, který je připojen na dvě péra podle obr.3.7 o tuhostech k_1 = 14,7 kNm^{-1} a k_2 = 24,5 kNm^{-1}.

Když vychýlíme hmotný bod svisle dolů (obr.3.7) o výchylku v, tak se o tuto samou výchylku musí péro (1) prodloužit a péro (2) zkrátit. Pak rovnici kmitání získáme při užití d'Alembertova principu jako součtovou výminku ve svislém směru

$$m\,\ddot{v}(t) + \left[k_1 + k_2\right] v(t) = 0.$$

3.2. VYNUCENÉ NETLUMENÉ KMITÁNÍ

Pohybovou rovnicí vynuceného netlumeného kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti (obr.3.31) získáme při užití d'Alembertova principu ve tvaru

$$m\ddot{v}(t) + k\,v(t) = F(t). \qquad (3.19)$$

Při buzení soustavy harmonicky proměnnou silou $F(t) = F\sin\omega t$ je pohyb popsán nehomogenní diferenciální rovnicí lineární 2.řádu ve tvaru

$$m\ddot{v}(t) + k\,v(t) = F\sin\omega t. \qquad (3.20)$$

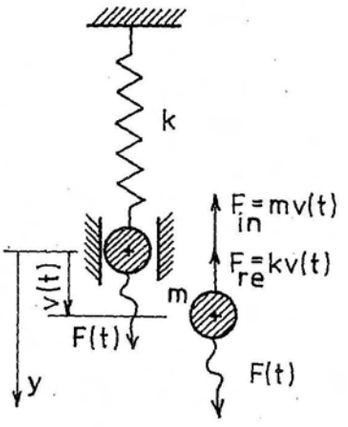
Partikulárním řešením rov. (3.20) je funkce

$$v(t) = v\sin\omega t, \qquad (3.21)$$

kde ω je kruhová frekvence harmonicky proměnné vnější síly a

$$v = \frac{F}{k-m\omega^2} = \frac{F}{m(\omega_o^2+\omega^2)} = v_{st}\frac{\omega_o^2}{\omega_o^2-\omega^2} = v_{st}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} =$$

$$= v_{st}\delta \qquad (3.22)$$



Obr.3.31

je amplituda vynuceného ustáleného kmitání, která může nabývat kladných i záporných hodnot.

Výraz

$$\delta = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2-\omega^2} = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} = \frac{1}{1-(\frac{f}{f_o})^2} = \frac{1}{1-\eta^2} \qquad (3.23)$$

nazýváme dynamickým součinitelem a poměr $\eta = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o}$ (3.24)

naladěním či poměrnou frekvencí. Je to bezrozměrná veličina, stejně jako dynamický součinitel. Případ rezonance je když $\omega_o = \omega$. Statická deformace, kterou by vyvodila klidně působí amplituda harmonicky proměnné síly je

$$v_{st} = \frac{F}{k} = \frac{F}{m\omega_o^2}. \qquad (3.25)$$

Obecné řešení rov.(3.19) je dáno výrazem [10]

$$v(t) = A_o\sin\omega_o t + B_o\cos\omega_o t + v\sin\omega t = v_o\sin(\omega_o t+\varphi_o) + v\sin\omega t. \qquad (3.26)$$

Rychlost pohybu je určena vztahem

$$\dot{v}(t) = \omega_o(A_o\cos\omega_o t - B_o\sin\omega_o t) + v\omega\cos\omega t = v_o\omega_o\cos(\omega_o t+\varphi_o) + v\omega\cos\omega t \qquad (3.27)$$

a zrychlení

$$\ddot{v}(t) = -\omega_o^2(A_o\sin\omega_o t + B_o\cos\omega_o t) - v\omega\sin\omega t = -v_o\omega_o^2\sin(\omega_o t+\varphi_o) - v\omega\sin\omega t. \qquad (3.28)$$

Partikulární řešení rov. (3.19) lze též zapsat ve tvaru

$$v(t) = v\sin(\omega t+\varphi), \qquad (3.29)$$

kde $v \geq 0$ a pro fázový posun platí $0 < \varphi < \pi$.

Budicí sílu obecného periodického průběhu $F(t) = F(t+T_p)$, která se mění periodicky s periodou T_p, ale ne harmonicky, lze rozvinout ve Fourierovu řadu

$$F(t) = \frac{F_{co}}{2} + \sum_{k=1}^{n} F_{ck}\cos\omega_k t + \sum_{k=1}^{n}\sin_k t = F_{st} + \sum_{k=1}^{n} F_k\sin(\omega_k t+\varphi_{F_k}), \qquad (3.30)$$

kde

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T_p} = k\omega_1, \qquad k = 1,2,3,\ldots \qquad (3.31)$$

a Fourierovy koeficienty jsou dány vztahy

$$F_{c0} = \frac{2}{T_p}\int_o^{T_p} F(t)dt, \qquad F_{ck} = \frac{2}{T_p}\int_o^{T_p} F(t)\cos\omega_k t\,dt,$$

$$F_{sk} = \frac{2}{T_p}\int_o^{T_p} F(t)\sin\omega_k t\,dt, \qquad F_{st} = \frac{1}{2}F_{c0}, \qquad (3.32)$$

$$F_k = \sqrt{(F_{ck}^2+F_{sk}^2)}, \quad \sin\varphi_{F_k} = \frac{F_{ck}}{F_k}, \quad \cos\varphi_{F_k} = \frac{F_{sk}}{F_k}, \quad tg\,\varphi_{F_k} = \frac{F_{ck}}{F_{sk}},$$

Výchylka při zatížení budicí silou zcela obecného průběhu je [10]

$$v(t) = A_0\cos\omega_0 t + B_0\cos\omega_0 t + \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau)d\tau . \qquad (3.33)$$

Odezvu na krátkodobý impuls síly I řešíme jako vlastní kmitání při počátečních podmínkách pohybu vyvolaných impulsem, tj. pro t = 0 platí

$$\dot{v}(0) = \frac{I}{m}, \qquad v(0) = 0. \qquad (3.34)$$

O krátkodobém impulsu síly mluvíme když $T_I/T_0 < 0{,}5$; 0,25). Potom nemusíme při výpočtu uvažovat tvar impulsu a výchylka je popsána vztahem

$$v(t) = \frac{I}{m\omega_0}\sin\omega_0 t. \qquad (3.35)$$

Při působení řady impulsů $I_i (i=1,2,\ldots,n)$ je výsledná výchylka

$$v(t) = \frac{1}{m\omega_0}\sum_{i=1}^{n} I_i \sin\omega_0(t-t_i). \qquad (3.36)$$

Při dlouhodobém impulsu síly F(t) = Ff(t), kdy pro dobu trvání T_I impulsu síly platí $T_I/T_0 > 0{,}5$, musíme uvažovat již i tvar impulsu síly f(t), podle kterého nám síla narůstá ke své maximální hodnotě.

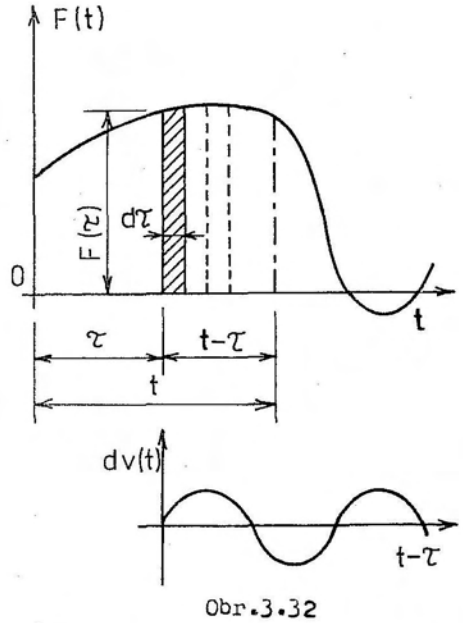
Kmitání vyvolané budicí silou obecného průběhu F(t) (obr.3.32) lze též řešit použitím tzv. konvolučního neboli Duhamelova integrálu

$$v(t) = \int_0^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau = \int_0^t F(t-\tau)h(\tau)d\tau , \qquad (3.37)$$

kde

$$h(t-\tau)\begin{cases} = 0 & \text{pro } (t-\tau) < 0 \quad \text{neboli } t < \tau, \\ \neq 0 & \text{pro } (t-\tau) > 0 \quad \text{neboli } t > \tau, \end{cases}$$

$$F(\tau)\begin{cases} = 0 & \text{pro } \tau < 0, \\ \neq 0 & \text{pro } \tau > 0. \end{cases}$$



Obr.3.32

Odezva netlumené soustavy v čase t na jednotkový impuls působící v čase τ ($t > \tau$) je rovna

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau). \qquad (3.38)$$

Příklad 3.32: Elektromotor tíhy 9,81 kN je uložen uprostřed prostého nosníku rozpětí l = 4 m, z válceného ocelového profilu I č.24 (obr.3.33). Pracuje při 1 400 ot/min, jeho nevyvážené síly působí o amplitudě 1,2 kN. Určete amplitudu ustáleného kmitání.

Z dané konstrukce si podle obr.3.33 vytvoříme fyzikální model jako soustavy o jednom stupni volnosti. Soustředěná hmota se skládá z hmoty stroje a hmoty nosníku soustředěné do jeho středu rozpětí. Tedy její hmotnost je $m = m_s + 2\mu\frac{l}{4} = 1\,000 + 2.36{,}2\,\frac{4}{4} = 1{,}072{,}4$ kg, kde $\mu = 36{,}2$ kg m^{-1} je hmotnost válceného ocelového profilu I 24 na 1 m délky rozpětí nosníku.

Náhradní tuhost nosníku, když $E = 2{,}1.10^5$ MPa a $J = 4\,250$ cm^4, je

$$k_n = \frac{48\,EJ}{l^3} = \frac{48.2{,}1.10^5.4{,}25.10^{-5}}{4^3} = 6{,}56 \text{ MN m}^{-1}.$$

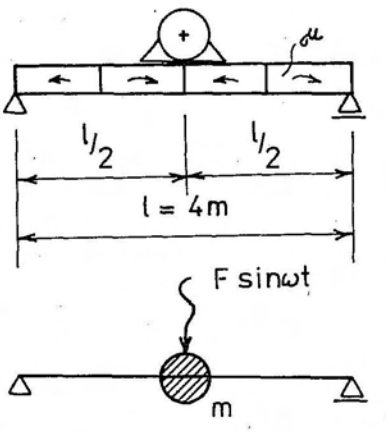
Vlastní kruhová frekvence dle (3.12) má hodnotu $\omega_0 = 78{,}2$ s^{-1}.
Kruhová frekvence harmonicky proměnné síly je

$$\omega = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{1\,400}{60} 2\pi = 146{,}6\ s^{-1}.$$

Amplituda vynuceného kmitání ustáleného dle (3.22) pak vyjde

$$v = v_{st} \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} = \frac{F}{k_n} \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} = \frac{1,2}{6\,560} \frac{1}{1-(\frac{146,6}{78,2})^2} =$$

$$= -73{,}2.0^{-6}\,m = -73{,}2\,\mu m.$$

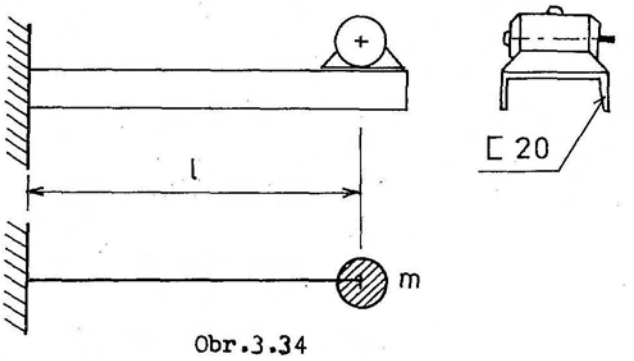


Obr.3.33

Příklad 3.33: Na konci vetknutého nosníku je uložen elektromotor o tíze G = 0,981 kN a otáčkách n = 900 min^{-1} (obr.3.34). Nosník je z válcovaného profilu [20, tíhy g = 253 Nm^{-1}, J_x = 1 910 cm^4, J_y = = 148 cm^4. Vypočtěte:

a) Při jaké délce l nosníku by došlo k rezonanci.

b) V jaké vzdálenosti od vetknutí je nutno umístit na nosník motor, aby vlastní kmitočet soustavy byl o 25% větší než kmitočet motoru.



Obr.3.34

Fyzikální model, jako soustava o o jednom stupni volnosti, bude podle obr.3.34 konsolový nosník se soustředěnou hmotou na volném konci o hmotnosti $m = \mu \frac{l}{2} + m_{el}$,

kde hmotnost nosníku μ = 25,78 kg m^{-1}

a hmotnost elektromotoru m_{el} = 100 kg.

Vlastní frekvence zadané soustavy je $$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,EJ}{l^3(\mu \frac{l}{2} + m_{el})}}.$$

Nejdříve vypočteme při jaké délce nosníku by došlo k rezonanci. Rezonance nastane bude-li platit rovnost $f = f_o$,

čili $$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,EJ}{l^3(\mu \frac{l}{2} + m_{el})}}.$$

Odtud vypočteme délku nosníku l. Zanedbáme-li v rovnici $\frac{\mu}{2} l^4 + m_{el} l^3 - \frac{3\,EJ}{4\pi^2 f^2} = 0$,

hmotnost nosníku, plyne pro hledanou délku nosníku podmínka

$$m_{el} l^3 - \frac{3\,EJ}{4\pi^2 f^2} = 0,$$

čili $$l = \sqrt[3]{\frac{3\,EJ}{4\pi^2 f^2 m_{el}}} = \sqrt[3]{\frac{3.2{,}1.10^5.10^6.1{,}48.10^{-6}}{4.\pi^2.15^2.100}} = \sqrt[3]{1{,}0496} = 1{,}016\ m.$$

Má-li být vlastní kmitočet soustavy o 25% větší než je kmitočet motoru, musí platit

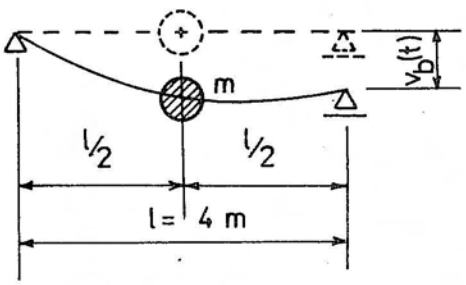
$$f_o = 1{,}25\,f, \quad \text{čili} \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,EJ}{l^3(\mu \frac{l}{2} + m_{el})}} = 1{,}25\,f,$$

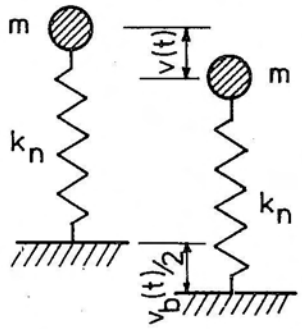
Při zanedbání hmotnosti nosníku vyjde podmínka pro délku nosníku

$$m_{el} l^3 - \frac{3\,EJ}{4\pi^2.1{,}25^2 f^2} = 0,$$

odkud obdržíme $$l = \sqrt[3]{\frac{3\,EJ}{4\pi^2.1{,}25^2 f^2\, m_{el}}} = \sqrt[3]{\frac{3.2{,}1.10^5.10^6.1{,}48.10^{-6}}{4.\pi^2.1{,}25^2.15^2.100}} = \sqrt[3]{0{,}6717} =$$

$$= 0{,}876\ m.$$





Obr.3.76

působí na danou hmotu, je úměrná tomuto stlačení $F_{re}(t) = k_n \left[v(t) - \frac{v_b(t)}{2} \right]$.

Pohybová rovnice po úpravě a dosazení za $v_b(t) = v_b \sin\omega t$ má tvar

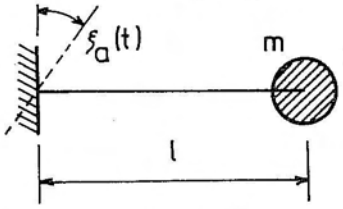
$$\ddot{v}(t) + \omega_o^2 v(t) = \omega_o^2 \frac{v_b}{2} \sin\omega t.$$

Její řešení hledáme ve tvaru $v(t) = v \sin\omega t$, kde amplituda vynuceného ustáleného kmitání vyjde

$$v = \frac{v_b}{2} \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{0,01}{2} \frac{78,2^2}{78,2^2 - 50^2} = 0,00846 \text{ mm} =$$

$$= 8,46 \mu\text{m}.$$

Příklad 3.93: U konsolového nosníku podle obr.3.77 se vetknutí pootáčí harmonicky dle rovnice $\zeta_a(t) = \zeta_a \sin\omega t$. Napište rovnici pohybu, určete amplitudu vynuceného kmitání soustředěné hmoty ve svislém směru.



Obr.3.77

Diferenciální rovnici pohybu soustředěné hmoty na volném konci konzoly napíšeme na principu superpozice přemístění od působících sil na soustavu a přemístění od pootáčení podpory (vetknutí konzoly). Přemístění soustředěné hmoty ve svislém směru od pootočení $\zeta_a = 1$ označme δ_a a přemístění od síly F = 1N δ_{11} (je to vlastně poddajnost). Potom při užití d'Alembertova principu pro výchylku soustředěné hmoty platí $v(t) = \zeta_a(t)\delta_m + (-m_1\ddot{v}(t))\delta_{11}$.

Odtud vyjde pohybová rovnice soustavy ve tvaru

$$\ddot{v}(t) + \frac{1}{m\delta_{11}} v(t) = \frac{1}{m\delta_{11}} \delta_m \zeta_a(t).$$

Dosadíme-li $\zeta_a(t) = \zeta_a \sin\omega t$ a uvážíme-li, že $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m\delta_{11}}$ dostaneme pohybovou rovnici

$$\ddot{v}(t) + \omega_o^2 v(t) = \omega_o^2 \delta_m \zeta_a \sin\omega t.$$

Její řešení hledáme ve tvaru $v(t) = v \sin\omega t$, kde amplituda vynuceného ustáleného kmitání vyjde

$$v = \frac{\omega_o^2 \delta_m \zeta_a}{\omega_o^2 - \omega^2} = 1 \zeta_a \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2},$$

neboť statické přemístění soustředěné hmoty při pootočení $\zeta_a = 1$ je $\delta_m = 1l$.

3.7. ENERGETICKÁ METODA

Vratné síly, které působí při netlumeném vlastním kmitání na soustředěnou hmotu, směřují neustále do rovnovážné polohy. Jsou tedy centrálními silami a mají potenciál. Z charakteru působících vratných sil je patrno, že jde o pohyb v konzervativním silovém poli. Proto platí při netlumeném kmitání zákon o zachování mechanické energie [5]

$$E_k + E_p = E_{ko} + E_{po} = \text{konst}, \qquad (3.76)$$

kde E_k a E_p jsou kinetická a potenciální energie v témže místě, E_{ko} a E_{po} jsou kinetické a potenciální energie v základní poloze. Tu ztotožníme s rovnovážnou polohou soustředěné hmoty, kde potenciální energie je nulová $E_{po} = 0$ a kinetická energie maximální

$$\max E_k = E_{ko} = \frac{1}{2} m (\max \dot{v}(t))^2 \qquad (3.77)$$

protože kmitající hmota má při průchodu rovnovážnou polohu největší rychlost $\dot{v}(t)$. V místě maximální výchylky (amplitudy $\pm v_o$) hmoty m je okamžitá rychlost nulová a proto nabývá zde i kinetická energie nulové hodnoty a tudíž potenciální energie je

maximální. Potom v souhlase s větou o zachování mechanické energie v konzervativním systému musí platit $\max E_k = \max E_p$. (3.78)

Příklad 3.94: Vypočtěte kolik je třeba vykonat práce k tomu, aby se pružina, předepnutá silou F = 1 kN při stlačení v = 8 cm, stlačila o další 2 cm.

Tuhost pružiny má hodnotu $k = \frac{F}{v} = \frac{1000}{0,08} = 12\,500\ \mathrm{Nm^{-1}}$.

Práce, nahromaděná v pružině při výchylce v = 8cm, čili potenciální energie, bude se rovnat výrazu $W_1 = \int_0^v F\,dv = \int_0^v kv\,dv = \frac{1}{2}kv^2 = \frac{1}{2}\,12500.0,08^2 = 400$ kNm = 400 kJ.

Při stlačení pružiny o 10 cm bude $W_2 = \frac{1}{2}12\,500.0,1^2 = 625$ kNm = 625 kJ.

Rozdíl $W = W_2 - W_1$ nám dává potřebnou práci potřebnou k stlačení pružiny z 8 na 10 cm. Vychází W = 625 - 400 = 225 kNm = 225 kJ.

Příklad 3.95: Určete frekvenci netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti m = 2 g, když amplituda je u_0 = 0,10 m a celková energie hmotného bodu je při tomto pohybu E = 1 J.

Celková energie hmotného bodu konajícího netlumený harmonický pohyb je dána dle (3.76) součtem kinetické a potenciální energie $E = E_k + E_p$. Harmonický pohyb je dle (3.8) popsán rovnicí $u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ a rychlost pohybu dle (3.9) $\dot{u}(t) = u_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Takže kinetická energie má potom podle (3.77) hodnotu

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{u}(t))^2 = \frac{1}{2}m\,u_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Pro potenciální energii hmotného bodu nacházejícího se ve vzdálenosti u(t) od rovnovážné polohy, jež se dá vyjádřit jako přetvárná práce pružiny, platí

$$E_p = \int_0^{u(t)} k\,u(t)\,du = \frac{1}{2}ku^2(t) = \frac{1}{2}ku_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mu_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

když jsme dosadili že $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Celková energie hmotného bodu potom podle (3.76) je

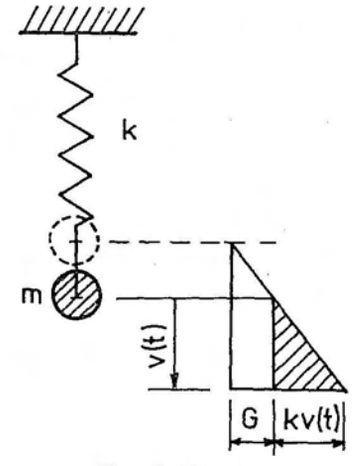
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mu_0^2\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mu_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mu_0^2\omega_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mu_0^2 4\pi^2 f_0^2 = 2\pi^2 mu_0^2 f_0^2.$$

Nakonec odtud vypočteme hledanou frekvenci

$$f_0 = \sqrt{\frac{E}{2\pi^2 mu_0^2}} = \sqrt{\frac{1}{2.\pi^2.2.10^{-3}.10^{-2}}} = 50,35\ \mathrm{Hz}.$$

Příklad 3.96: Sestavte pohybovou rovnici soustavy s jedním stupněm volnosti (obr.3.78) pomocí energetické metody.



Obr.3.78

Vyjdeme z rovnice zákona o zachování mechanické energie (3.76). Kinetická energie naší soustavy podle (3.77) je $E_k = \frac{1}{2}m(\dot{v}(t))^2$.

Potenciální energie je práce nebo energie, která se v soustavě nahromadí během přemístění v. Síla v péru je

$$G + k\,v(t)$$

a potenciální energie péra

$$E_p = \int_0^v (G + k\,v(t))dt = G\,v + \frac{1}{2}k\,v^2.$$

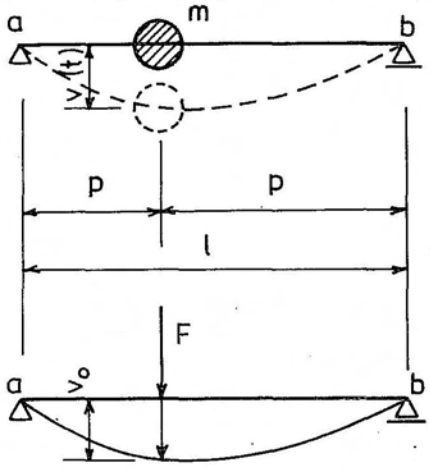
Soustava bude kmitat kolem statické výchylky (obr.3.78), odečteme tedy (-Gv), takže potenciální energie se mění podle vztahu $E_p = \frac{1}{2}k\,v^2(t)$.

Dosadíme kinetickou a potenciální energii do zákona zachování mechanické energie (3.76)

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m (\dot{v}(t))^2 + \frac{1}{2} k v^2(t) = \text{konst},$$

derivujeme podle času $\frac{d}{dt}(E_k+E_p) = \left[m \ddot{v}(t) + k v(t)\right] \dot{v}(t) = 0.$

Odtud plyne pohybová rovnice netlumeného kmitání $m \ddot{v}(t) + k v(t) = 0.$



Obr.3.79

Příklad 3.97: Vypočtěte energetickou metodu vlastní kruhovou frekvenci soustavy s jedním stupněm volnosti znázorněné na obr.3.79.

Předpokládáme, že soustava koná harmonický pohyb ve tvaru průhybové čáry od síly F (obr.3.79).

Kinetická energie zadané soustavy s jedním stupněm volnosti je dána vztahem (3.77)

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{v}(t))^2.$$

Soustava má největší kinetickou energii v okamžiku, kdy při kmitání prochází rovnovážnou polohou, protože rychlost hmoty je zde maximální.

Rychlost hmoty obdržíme derivací rovnice (3.8) vyjadřující harmonické kmitání vlastní netlumené, čili

$$v(t) = v_o \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi_o).$$

Největší rychlost hmoty bude v případě, kdy $\cos(\omega_o t + \varphi_o) = 1$, čili $\max \dot{v}(t) = v_o \omega_o$.

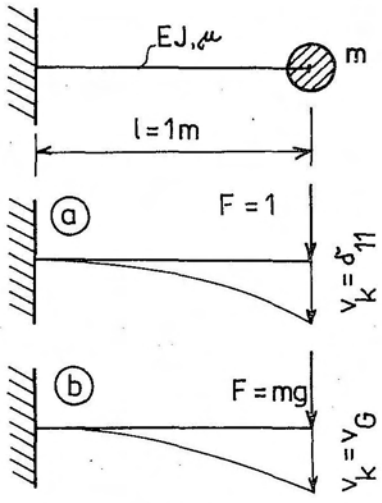
Potom maximální kinetická energie je $\max E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 \omega_o^2$.

Dle (3.78) je tato energie rovna potenciální energii soustavy ve chvíli největší výchylky. Potenciální energie soustavy je rovna práci, kterou vykoná síla F (obr.3.79) na dráze rovné amplitudě kmitání soustavy. Práce síly F na dráze v_o při podmínce postupného a nepřerušovaného růstu síly F od nuly do konečné své velikosti bude

$$\max E_p = \frac{1}{2} F v_o.$$

Na základě podmínky rovnosti maximální kinetické a potenciální energie (3.78) obdržíme $\frac{1}{2} m v_o^2 \omega_o^2 = \frac{1}{2} F v_o,$

Odkud vypočteme vlastní kruhovou frekvenci $\omega_o = \sqrt{\frac{F v_o}{m v_o^2}}$.



Obr.3.80

Příklad 3.98: Vypočtěte energetickou metodu vlastní kruhovou frekvenci příčného kmitání konzolového nosníku se strojem o hmotnosti m_s = 1000 kg na volném konci (obr.3.80). Nosník je z válceného ocelového profilu I č.24, μ = 36,2 kg m^{-1}, J = 4 250 cm^4, E = 2,1.10^5 MPa.

Z dané konstrukce vytvoříme fyzikální model jako soustavy o jednom stupni volnosti soustředěním hmoty nosníku na volný konec a do vetknutí konzoly. Kmitající soustředěná hmota na volném konci má hmotnost

$m = m_s + \frac{1}{2}\mu l = 1\,000 + \frac{1}{2} 36{,}2.1 = 1018{,}1$ kg.

Nejdříve předpokládáme že soustava harmonicky kmitá ve tvaru průhybové čáry od zatížení silou F = 1 na volném konci konzoly. Průhyb volného konce je [3]

$$v_k = \frac{F l^3}{3 EJ} = \frac{1^3}{3EJ} = \delta_{11}.$$

Je to pořadnice příčinkové čáry průhybu na volném konci, pořadnice $v_k = \delta_{11}$ je vlastně poddajností soustavy. Podle příkladu 3.97 pro maximální kinetickou energii a

maximální potenciální energii platí $\max E_k = m\delta_{11}^2\omega_o^2$, $\max E_p = \frac{1}{2}1\delta_{11}$.

Z rovnosti energií podle (3.78) $\frac{1}{2}m\delta_{11}^2\omega_o^2 = \frac{1}{2}1\delta_{11}$ vyjde vlastní kruhová frekvence

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3\,EJ}{m\,l^3}} = \sqrt{\frac{3.2,1.10^{11}.4,25.10^{-5}}{1018,1.1^3}} = 162,17\ s^{-1}.$$

Porovnej výsledek se vztahem (3.12).

V druhém případě budeme předpokládat, že konzola harmonicky kmitá ve tvaru průhybové čáry od zatížení vlastní tíhou soustředěné hmoty, čili F = G = mg. Průhyb volného konce je [3] $v_k = \frac{G\,l^3}{3\,EJ} = \frac{mg\,l^3}{3\,EJ} = v_G$.

Pro maximální energie podle příkladu 3.97 platí

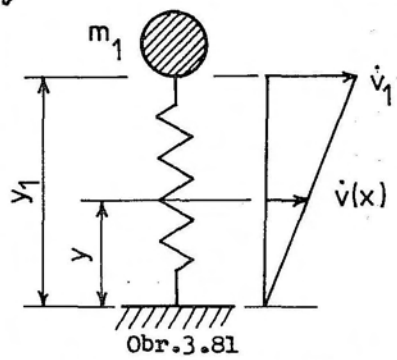
$$\max E_k = \frac{1}{2}m\,v_g^2\,\omega_o^2, \qquad \max E_p = \frac{1}{2}mg\,v_g,$$

takže z rovnosti energií $\frac{1}{2}m\,v_G^2\omega_o^2 = \frac{1}{2}mg\,v_G$

vyjde vlastní kruhová frekvence $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{v_G}} = \sqrt{\frac{3\,EJ}{m\,l^3}} = 162,17\ s^{-1}$.

Porovnej výsledek se vztahem (3.12).

Příklad 3.99: Určete přibližně vlastní frekvenci hmotného bodu o hmotnosti m_1, upevněného na pružině při uvažování hmotnosti pružiny (obr.3.81). Tuhost pružiny je k a hmotnost m.



Obr.3.81

Pro vyšetření tohoto kmitavého pohybu použijeme věty o zachování mechanické energie. Budeme předpokládat, že jednotlivé hmotné elementy pružiny harmonicky kmitají s výchylkami, které jsou přímo úměrné vzdálenosti od místa závěsu y (obr.3.81). Kinetickou energii soustavy při průchodu rovnovážnou polohou, čili její maximální hodnotu, vyjádříme dle (3.77). Víme-li, že bod koná kmitavý pohyb, pak dle (3.8) platí $v(t) = v_o\sin(\omega_o t + \varphi_o)$ a rychlost pohybu je dána rovnicí $\dot{v}(t) = v_o\omega_o\cos(\omega_o t + \varphi_o)$. Takže platí podle (3.77)

$$\max E_k = \frac{1}{2}m_1v_o^2\omega_o^2 + \int_o^m \frac{1}{2}\dot{v}^2(x)\,dm,$$

kde m_1 je hmotnost kmitajícího bodu, m hmotnost pružiny, $\dot{v}(x)$ rychlost kmitání elementu pružiny v místě y od závěsu (obr.3.81). Podle předpokladu klademe ve shodě s obr. 3.81

$$\dot{v}(x) = \dot{v}_1\frac{y}{y_1} = \max\dot{v}(t)\frac{y}{y_1} = v_o\omega_o\frac{y}{y_1},$$

a jelikož můžeme psát $dm = \mu\,dy$, kde μ je hmotnost jednotkové délky pružiny, dostáváme po provedené integraci

$$\max E_k = \frac{1}{2}m_1v_o^2\omega_o^2 + \frac{1}{2}\mu\,v_o^2\,\omega_o^2\frac{1}{y_1^2}\int_o^{y_1} y^2dy = \frac{1}{2}v_o^2\omega_o^2\left(m_1 + \frac{1}{3}\mu\frac{y_1^3}{y_1^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}v_o^2\,\omega_o^2(m_1 + \frac{1}{3}\mu\,y_1) = \frac{1}{2}v_o^2\,\omega_o^2(m_1 + \frac{1}{3}m).$$

V poslední rovnici jsme vyjádřili celkovou hmotnost pružiny $m = \mu\,y_1$. Takže při přibližném uvažování hmotnosti pružiny připočteme k hmotnosti bodu jednu třetinu hmotnosti pružiny. Výraz $(m_1 + \frac{1}{3}m)$ nazýváme náhradní hmotností.

Potenciální energii vyjádříme jako přetvárnou práci pružiny

$$E_p = \int_o^{v(t)} k\,v(t)\,dv = \frac{1}{2}k\,v^2(t).$$

Při harmonickém pohybu (3.8) $v(t) = v_o\sin(\omega_o t + \varphi_o)$ je potenciální energie maximální v místě největší výchylky $\max v(t) = v_o$, takže platí $\max E_p = \frac{1}{2}k\,v_o^2$.

V souhlase s větou o zachování mechanické energie v konzervativním systému musí dle (3.78) platit $\frac{1}{2}v_o^2\,\omega_o^2(m_1 + \frac{1}{3}m) = \frac{1}{2}v_o^2\,k$,

čili $$0 = m(v^o_{1(1)}v^o_{1(3)} + v^o_{2(1)}v^o_{2(3)} + v^o_{3(1)}\,v^o_{3(3)}),$$

$$0 = m(v^o_{1(2)}v^o_{1(3)} + v^o_{2(2)}v^o_{2(3)} + v^o_{3(2)}\,v^o_{3(3)}).$$

Po dosazení číselných hodnot za první a druhý tvar a úpravě získáme

$$v^o_{3(3)} = -\frac{1,0}{1,0}v^o_{1(3)} - \frac{2,0}{1,0}v^o_{2(3)},$$

$$v^o_{3(3)} = +\frac{1,0}{1,0}v^o_{1(3)} + \frac{0,0}{1,0}v^o_{2(3)}.$$

Z poslední rovnice vychází $$\frac{v^o_{3(3)}}{v^o_{1(3)}} = 1,0$$

a potom z první $$\frac{v^o_{3(3)}}{v^o_{1(3)}} = -1,0 - 2,0\frac{v^o_{2(3)}}{v^o_{1(3)}},$$

$$+1,0 = -1,0 - 2,0\frac{v^o_{2(3)}}{v^o_{1(3)}}, \quad \text{čili} \quad \frac{v^o_{2(3)}}{v^o_{1(3)}} = -1,0.$$

Třetí kruhovou frekvenci vlastního kmitání vypočteme z rovnice, kterou získáme po úpravě z (4.53) $$\frac{v^o_{2(3)}}{\omega^2_{(3)}} = \frac{3m\,l^3}{3888EJ}v^o_{2(3)}.$$

Vychází $$\omega_{(3)} = \sqrt{\frac{3888EJ}{3m\,l^3}} = \sqrt{(1296\frac{EJ}{m\,l^3})} = 36,0\sqrt{\frac{EJ}{m\,l^3}}.$$

4.5 ENERGETICKÁ METODA

Tato metoda je založena na principu zachování mechanické energie. Volné kmitání jakékoliv soustavy můžeme pokládat za proces neustálé přeměny kinetické energie v potenciální a naopak. Jestliže zanedbáme tlumení soustavy, můžeme psát, že celková mechanická energie je konstantní

$$E_k + E_p = \text{konst.}, \tag{4.67}$$

čili $$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0, \tag{4.68}$$

kde E_k je kinetická energie a E_p potenciální. Přitom předpokládáme, že amplitudy kmitání jsou malé a tvar deformované osy soustavy při kmitání je podobný deformaci při působení statického zatížení.

Rovnice (4.67) v okamžiku, kdy všechny body soustavy dosahují současně krajní polohy, lze psát ve tvaru $$0 + \max E_p = \text{konst.}, \tag{4.69}$$

neboť je rychlost a tudíž kinetická energie nulová a současně potenciální energie maximální. V poloze statické rovnováhy rovnice (4.67) získává tvar

$$\max E_k + 0 = \text{konst.}, \tag{4.70}$$

Srovnáním posledních rovnic vychází $$\max E_k = \max E_p. \tag{4.71}$$

Energetickou metodu užíváme k určení první vlastní frekvence. Potenciální energie $\max E_p$ je přetvárnou prací soustavy. Prozatím neznámý první tvar kmitání volíme tak, aby splňoval geometrické okrajové podmínky soustavy.

Čím lépe ho odhadneme, tím lépe vystihuje vypočtená frekvence z rov.(4.71)vlastní frekvenci dané soustavy. Vypočtené hodnoty $\omega_{(1)}$ jsou vždy vyšší než skutečné. Dá se dokázat při výpočtu $\omega_{(1)}$ z několika zvolených tvarů kmitání, že se nejvíce blíží ke správné hodnotě ta nejnižší z vypočtených.

Kinetická energie diskrétní soustavy za předpokladu harmonického kmitání podle (4.30) je vyjádřena rovnicí [10], [8]

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega_{(1)}^2 (v_{i(1)}^o)^2 \cos^2(\omega_{(1)} t + \varphi_{(1)}^o). \qquad (4.72)$$

Kinetická energie je maximální když $\cos(\omega_{(1)} t + \varphi_{(1)}^o) = 1$, takže v maticovém záznamu platí

$$\max E_k = \frac{1}{2} \omega_{(1)}^2 \left\{ v_{(1)}^o \right\}^T \left[m \right]_D \left\{ v_{(1)}^o \right\} . \qquad (4.73)$$

Maximální potenciální energii určíme jako práci, jíž je zapotřebí k pružnému přetvoření soustavy do krajní polohy

$$\max E_p = \frac{1}{2} \left\{ v_{(1)}^o \right\}^T \left[k \right] \left\{ v_{(1)}^o \right\} . \qquad (4.74)$$

Základní vlastní kruhová frekvence po dosazení (4.73) a (4.74) do (4.71) při vhodně voleném tvaru kmitání $\left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}$ vyjde

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{2 \max E_p}{\left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}^T \left[m \right]_D \left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}} = \frac{\left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}^T \left[k \right] \left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}}{\left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}^T \left[m \right]_D \left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}} . \qquad (4.75)$$

Obyčejně volíme za výchozí přibližný tvar vlastního kmitání $\left\{ {}^o v_{(1)}^o \right\}$ průhybovou čáru od určitého zatížení. Nejlepší výsledky dostáváme je-li to ohybová čára od zatížení vlastní tíhou soustředěných hmot na řešené soustavě. Potenciální energie je potom rovna poloviční práci zatěžujících sil na příslušných výchylkách.

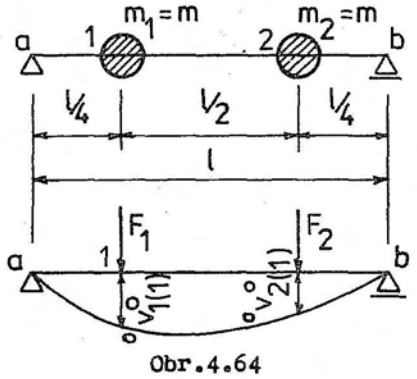
Též lze předpokládat, že soustava kmitá ve tvaru analytické křivky, např. paraboly. Potenciální energie se potom určí jako přetvárná práce vnitřních sil příslušná ohybové čáře při uvažování jen ohybových momentů [29]

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x,t)}{EJ(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \qquad (4.76)$$

Za předpokladu harmonického kmitání a dosazením předpokládaného tvaru kmitání $\left\{ {}^o v_{(1)}^o (x) \right\}$ je maximální hodnota potenciální energie určena vztahem

$$\max E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) \left(\frac{d^2 \left\{ {}^o v_{(1)}^o (x) \right\}}{dx^2} \right)^2 dx. \qquad (4.77)$$

Energetická metoda je rychlá, avšak její nevýhodou je, že nemůžeme určit chybu vypočtené vlastní frekvence proti skutečné.



Obr.4.64

Příklad 4.29:

Vypočtěte vlastní kruhové frekvence kmitání nehmotného nosníku ohybové tuhosti EJ se dvěma soustředěnými stejnými hmotami (obr.4.64) energetickou metodou.

Příčinkové pořadnice průhybu jsou

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{9 l^3}{768 EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7 l^3}{768 EJ}.$$

K určení první vlastní kruhové frekvence energetickou metodou zvolíme za tvar kmitání ohybovou čáru od osamělých břemen $F_1 = F_2 = F$ (obr.4.64). Průhyby v bodě 1 a 2 jsou

$${}^o v_{1(1)}^o = {}^o v_{2(1)}^o = F(\delta_{11} + \delta_{21}) = F\left(\frac{9 l^3}{768 EJ} + \frac{7 l^3}{768 EJ} \right) = \frac{16 F l^3}{768 EJ}.$$

Položíme-li $F_1 = F_2 = F = 1$ je maximální kinetická energie podle (4.73)

$$\max E_k = \frac{1}{2} \omega_{(1)}^2 \left(m_1 ({}^o v_{1(1)}^o)^2 + m_2 ({}^o v_{2(1)}^o)^2 \right) = \frac{1}{2} m \omega_{(1)}^2 \left[\left(\frac{16 l^3}{768 EJ} \right)^2 \left(\frac{16 l^3}{768 EJ} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_{(1)}^2 \left(\frac{16 l^3}{768 EJ} \right)^2 .$$

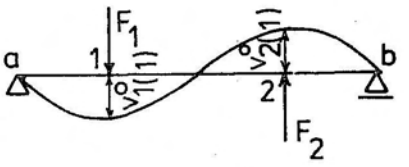
Maximální potenciální energii určíme jako přetvárnou práci [29]

$$\max E_p = \frac{1}{2} 1 ({}^o v_{1(1)}^o + {}^o v_{2(1)}^o) = \frac{1}{2} \left(\frac{16 l}{768 EJ} + \frac{16 l}{768 EJ} \right) .$$

Dosazením do rov.(4.71) vyjde první vlastní kruhová frekvence

$$\omega_{(1)} = \sqrt{\frac{2}{m\frac{32\,l^3}{768EJ}}} = 6{,}93\sqrt{\frac{EJ}{m\,l^3}}.$$

Abychom **určili 2.** vlastní kruhovou frekvenci necháme působit síly F antimetricky (obr.4.65). Průhyby od takto působících sil $F_1 = F_2 = F$ jsou



Obr.4.65

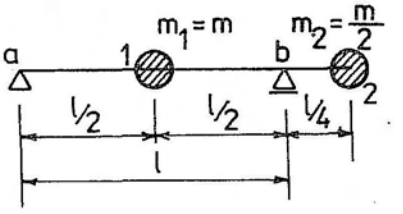
$$v^o_{1(1)} = F\,(\delta_{11} - \delta_{21}) = F\left(\frac{9\,l^3}{768EJ} - \frac{7\,l^3}{768EJ}\right) = \frac{2F\,l^3}{768EJ},$$

$$v^o_{2(1)} = -v^o_{1(1)} = -\frac{2F\,l^3}{768EJ}.$$

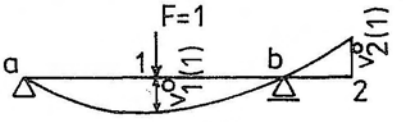
Druhá vlastní kruhová frekvence, když položíme $F_1 = F_2 = F = 1$, potom vyjde

$$\omega_{(2)} = \sqrt{\frac{\frac{2\,l^3}{768EJ} + \frac{2\,l^3}{768EJ}}{m\left[\left(\frac{2\,l^3}{768EJ}\right)^2 + \left(\frac{2\,l^3}{768EJ}\right)^2\right]}} = \sqrt{\left(\frac{2.768}{4}\,\frac{EJ}{m\,l^3}\right)} = \sqrt{\left(384\frac{EJ}{m\,l^3}\right)} = 19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{m\,l^3}}.$$

P ř í k l a d 4.30: Určete první vlastní frekvenci nehmotného nosníku s převislým koncem jako soustavy se dvěma stupni volnosti dle obr.4.66 energetickou metodou. Ohybová tuhost nosníku je EJ, soustředěné hmoty mají hmotnost $m_1 = m$ a $m_2 = \frac{m}{2}$.



Předpokládáme, že nosník kmitá ve tvaru ohybové čáry od zatížení silou F = 1 N v bodě 1 (obr.4.66). Přibližné hodnoty amplitud výchylek jsou



Obr.4.66

$$v^o_{1(1)} = \delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}, \qquad v^o_{2(1)} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{64EJ}.$$

Tomu odpovídá tvar kmitání

$$a_{2(1)} = \frac{v^o_{2(1)}}{v^o_{1(1)}} = -\frac{48}{64} = -0{,}75.$$

Srovnáme-li s přesným výpočtem v příkladu 4.2, vidíme zde značný rozdíl. Kinetická energie celé soustavy, když předpokládáme, že oba body nosníku vykonávají harmonický pohyb podle rovnice (4.6) je

$$E_k = \frac{1}{2}m_1(v^o_{1(1)}\omega_{(1)}\cos\omega_{(1)}t)^2 + \frac{1}{2}m_2(v^o_{2(1)}\omega_{(1)}\cos\omega_{(1)}t)^2.$$

Maximální kinetická energie bude při průchodu rovnovážnou polohou, když $\cos\omega t = 1$,

$$\max E_k = \frac{1}{2}\omega^2_{(1)}\left[m_1(v^o_{1(1)})^2 + m_2(v^o_{2(1)})^2\right].$$

Po dosazení do (4.71) dostaneme výraz pro určení první vlastní kruhové frekvence

$$\omega^2_{(1)} = \frac{2\max E_p}{m_1(v^o_{1(1)})^2 + m_2(v^o_{2(1)})^2}.$$

Potenciální energie bude maximální při krajní výchylce a rovná se poloviční práci vnější síly F = 1 na dráze $v^o_{1(1)}$ (je to přetvárná práce potřebná k vychýlení nosníku do krajní polohy)

$$\max E_p = \frac{1}{2}F\,v^o_{1(1)} = \frac{1}{2}F\,\delta_{11} = \frac{1}{2}1{,}0\frac{l^3}{48EJ} = \frac{l^3}{96EJ}.$$

Po dosazení za $\max E_p$, za $v^o_{1(1)} = \delta_{11}$ a $v^o_{2(1)} = \delta_{21}$, za $m_1 = m$ a $m_2 = \frac{m}{2}$, první vlastní kruhová frekvence vyjde

$$\omega^2_{(1)} = \frac{2\,\frac{l^3}{96EJ}}{m\left[\left(\frac{l^3}{48EJ}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{l^3}{64EJ}\right)^2\right]} = \frac{4}{m\left[\frac{16\,l^3}{192EJ} + \frac{9}{2}\frac{l^3}{.192EJ}\right]} = \frac{4.2.192}{41}\frac{EJ}{m\,l^3} = 37{,}48\frac{EJ}{m\,l^3}.$$

čili

$$\omega_{(1)} = 6{,}12\sqrt{\frac{EJ}{m\,l^3}}.$$

$$\max E_p = \frac{1}{2}(G_1 v_1^o + G_2 v_2^o) = \frac{1}{2}(0{,}0064286 + 0{,}01251) = 0{,}0094693 \text{ kNm}.$$

Po dosazení do (4.71) dostaneme $${}^3\omega^2_{(1)} = \frac{2.0{,}0094693}{1.(0{,}0064289^2 + 0{,}01251^2)} = 95{,}73 \text{ s}^{-2}.$$

Tomu odpovídající tvarový součinitel $$a_{2(1)} = \frac{v^o_{2(1)}}{v^o_{1(1)}} = \frac{0{,}01251}{0{,}0064286} = 1{,}946 .$$

Počítáme-li více přibližných hodnot první vlastní kruhové frekvence z různých volených tvarů, je nejsprávnější hodnota nejnižší. V našem případě je

$${}^3\omega^2_{(1)} = 95{,}73 \text{ s}^{-2} < {}^2\omega^2_{(1)} = 95{,}92 \text{ s}^{-2} < {}^1\omega^2_{(1)} = 100{,}47 \text{ s}^{-2},$$

takže nejsprávnější hodnota je $${}^3\omega^2_{(1)} = 95{,}73 \text{ s}^{-2} .$$

Příklad 4.32: **Energetickou metodou určete první vlastní frekvenci kmitání nosníku z příkladu 4.7 jako soustavy o třech stupních volnosti (obr.4.70).**

Nejdříve volíme za výchozí tvar kmitání ohybovou čáru od zatížení jednotkovou silou uprostřed rozpětí nosníku (obr.4.70).

$$\left\{v^o_{(1)}\right\} = \left\{v^o_{1(1)}, v^o_{2(1)}, v^o_{3(1)}\right\}^T = \left\{\delta_{12}, \delta_{22}, \delta_{32}\right\}^T.$$

Maximální kinetická energie podle (4.73) je

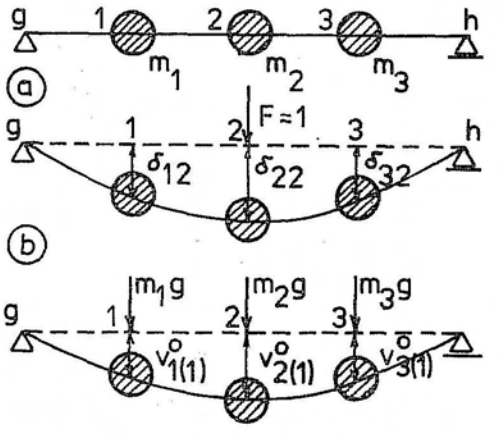
$$\max E_k = \frac{1}{2}\omega^2_{(1)} \sum m_i (v^o_{i(1)})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2_{(1)}\left[m_1(v^o_{1(1)})^2 + m_2(v^o_{2(1)})^2 + m_3(v^o_{3(1)})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2_{(1)}(m_1\delta^2_{12} + m_2\delta^2_{22} + m_3\delta^2_{32})$$

a maximální potenciální energie

$$\max E_p = \frac{1}{2} F v^o_{2(1)} = \frac{1}{2}\delta_{22} .$$



Obr.4.70

Dosazením do (4.71) vychází první vlastní kruhová frekvence

$$\omega^2_{(1)} \doteq \frac{\delta_{22}}{m_1\delta^2_{12} + m_2\delta^2_{22} + m_3\delta^2_{32}}.$$

Po dosazení číselných hodnot podle příkladu 4.7 vyjde

$$\omega_{(1)} \doteq \sqrt{\frac{81}{m\frac{l^3}{3888EJ}(39^2+81^2+39^2)}} \doteq \sqrt{\frac{81.3888.150.10^6}{400.12^3.9603}} = 84{,}36 \text{ s}^{-1}.$$

Ve většině případů nejlépe vystihuje tvar kmitání ohybová čára od zatížení silami úměrnými tíze soustředěných hmot. V našem případě $F_1 = F_2 = F_3 = mg$. Průhyby v bodech 1,2,3 jsou

$$v^o_{1(1)} = mg\,c\,(25+39+17) = 81\,mg\,c,$$

$$v^o_{2(1)} = mg\,c\,(39+81+39) = 159\,mg\,c,$$

$$v^o_{3(1)} = mg\,c\,(17+39+25) = 81\,mg\,c,$$

když jsme označili $$c = \frac{l^3}{3888EJ}.$$

První vlastní kruhová frekvence pak vyjde

$$\omega_{(1)} \doteq \sqrt{\frac{F_1v^o_{1(1)} + F_2v^o_{2(1)} + F_3v^o_{3(1)}}{m_1(v^o_{1(1)})^2 + m_2(v^o_{2(1)})^2 + m_3(v^o_{3(1)})^2}} \doteq \sqrt{\frac{m^2g^2c(81+159+81}{m\,m^2g^2c^2(81^2+159^2+81^2)}} =$$

$$\doteq \sqrt{\frac{81+159+81}{mc(81^2+159^2+81^2)}} \doteq \sqrt{\frac{3888.150.10^6.321}{400.12^3.38403}} \doteq 83{,}98 \text{ s}^{-1}.$$

11. KMITÁNÍ ZÁKLADŮ STROJŮ

Základem stroje se rozumí samostatná stavební konstrukce, která slouží k přenesení tíhy stroje a sil vznikajících při jeho provozu do podloží nebo do jiné stavební konstrukce. Podle typu konstrukce rozdělujeme základy strojů na blokové, rámové a stěnové.

Zanedbáme-li pružnost základového bloku a stroje, je základ tuhé těleso zcela obecného tvaru se šesti stupni volnosti. Jeho pohyb je popsán rovnicemi

$$\left[m\right]\left\{\ddot{r}(t)\right\} + \left[b\right]\left\{\dot{r}(t)\right\} + \left[k\right]\left\{r(t)\right\} = \left\{F(t)\right\}, \tag{11.1}$$

kde vektor přemístění je

$$\left\{r(t)\right\} = \left\{u(t),\ v(t),\ w(t), \xi(t), \eta(t), \zeta(t)\right\}^T \tag{11.2}$$

a matice hmotnosti

$$\left[m\right] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_{xy} & -S_{xz} \\ 0 & m & 0 & -S_{xy} & 0 & -S_{yz} \\ 0 & 0 & m & S_{xz} & -S_{yz} & 0 \\ 0 & -S_{xy} & S_{xz} & I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ S_{xy} & 0 & -S_{yz} & -D_{xy} & I_x & -D_{yz} \\ -S_{xz} & S_{yz} & 0 & -D_{xz} & -D_{xz} & I_z \end{bmatrix} . \tag{11.3}$$

Matice statické tuhosti $\left[k\right]$ je čtvercová 6x6a a je dána pružnými vlastnostmi uložení [10], [8]. Rovněž matice tlumení $\left[b\right]$ je čtvercová. Prvky matice budicích sil $\left\{F(t)\right\}$ představují složky výslednice budicích sil redukované k počátku souřadného systému

$$\left\{F(t)\right\} = \left\{\Sigma F_{ix},\ \Sigma F_{iy},\ \Sigma F_{iz},\ \Sigma M_{ix},\ \Sigma M_{iy},\ \Sigma M_{iz}\right\}^T. \tag{11.4}$$

Matice hmotnosti $\left[m\right]$ se stane diagonální jedině v tom případě, kdyby souřadné osy X, Y, Z byly centrálními osami hlavními.

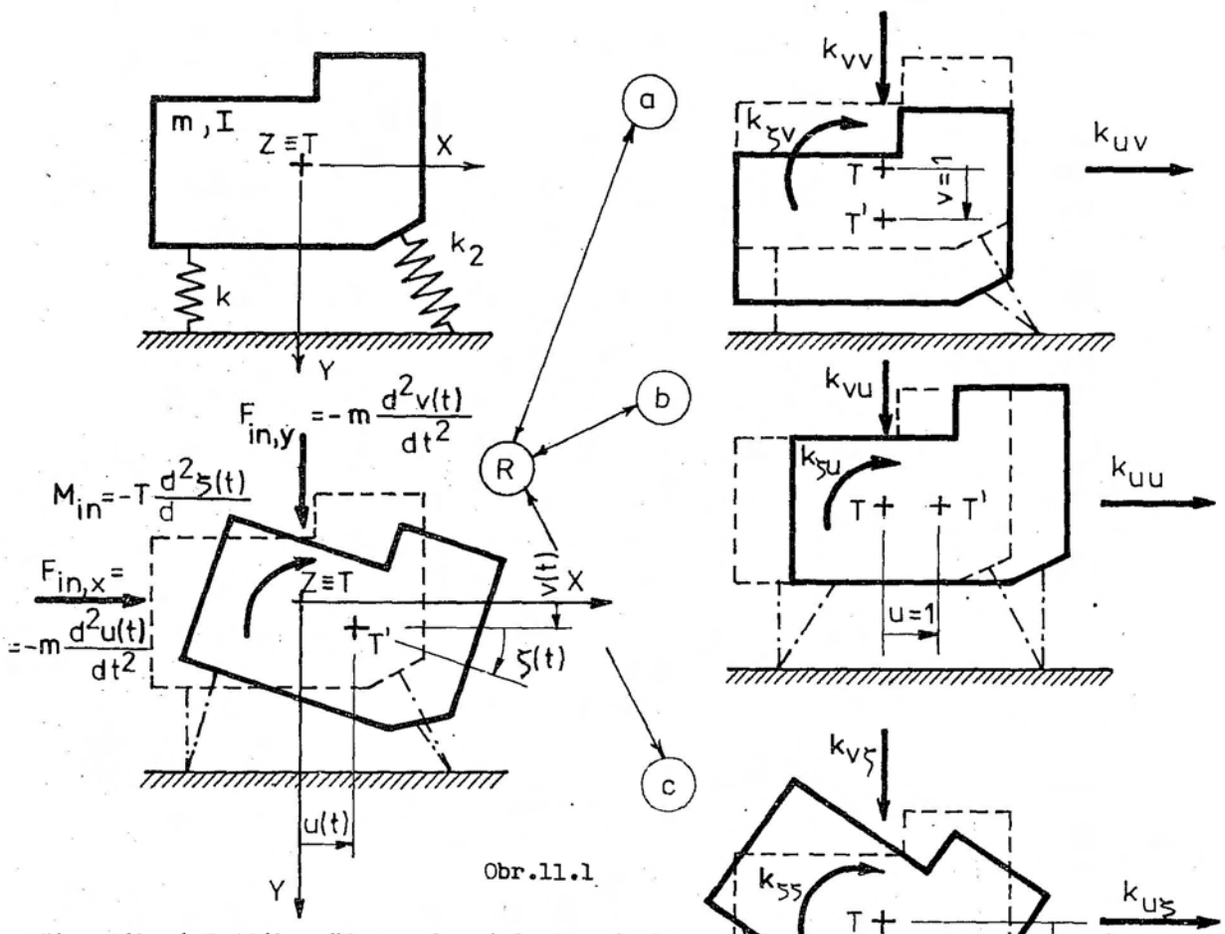
Mnohdy je soustava základ-stroj včetně uložení souměrná ke dvěma rovinám XY, YZ, zavedeme-li souřadnou osu Y tak, že leží v průsečnici obou rovin. Soustava rovnic (11.1) se potom rozpadá na dvě soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu o dvou neznámých a dvě rovnice druhého řádu, které jsou vzájemně nezávislé. Soustava může kmitat nezávisle posuvným kmitáním ve směru osy Y, otáčivým kmitáním kolem této osy anebo rovinným kmitáním v rovinách XY a YZ.

Ve stavební praxi se setkáme s možností navrhnout masivní blokový základ pod stroj, který je souměrný ke svislé rovině XY (obr.11.1). Jeho výpočet pak představuje řešení kmitání tuhé desky ve svislé rovině XY jako soustavy se třemi stupni volnosti. Vektor přemístění takovéhoto základu pružně uloženého má tři prvky

$$\left\{r(t)\right\} = \left\{v(t),\ u(t),\ \zeta(t)\right\}^T. \tag{11.5}$$

K sestavení pohybových rovnic užijeme Bettiho věty o vzájemnosti. Na obr.11.1 vlevo je znázorněn skutečný stav kmitání (R) a příslušnými setrvačnými silami a vpravo jsou pomocné stavy s jednotkovými posunutími ve směru osy Y a X, a s jednotkovým pootočením kolem osy.Z. Při postupné aplikaci Bettiho věty na stavy (R)↔(a), (R)↔(b) m (R)↔(c) dostaneme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} -m\,\ddot{v}(t) &= k_{vv}v(t) + k_{uv}u(t) + k_{\zeta v}\zeta(t), \\ -m\,\ddot{u}(t) &= k_{vu}v(t) + k_{uu}u(t) + k_{\zeta u}\zeta(t), \\ -I\,\ddot{\zeta}(t) &= k_{v\zeta}v(t) + k_{u\zeta}u(t) + k_{\zeta\zeta}\zeta(t). \end{aligned} \tag{11.6}$$



Obr.11.1

Při aplikaci Bettiho věty na dva jednotkové stavy např. (a)↔(b) vychází $k_{uv} = k_{vu}$.
Po úpravě rov.(11.6) v maticovém záznamu mají tvar

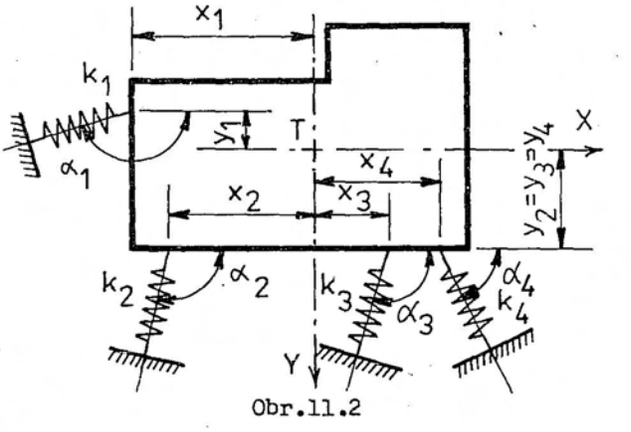
$$\left[m\right]_D \left\{\ddot{r}(t)\right\} + \left[k\right] \left\{r(t)\right\} = \left\{0\right\}, \quad (11.7)$$

kde v matici hmotnosti

$$\left[m\right]_D = \begin{bmatrix} I & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & m & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & m \end{bmatrix}_D \quad (11.8)$$

je m hmotnost a I hmotný moment setrvačnosti desky k těžišti, a matice tuhosti

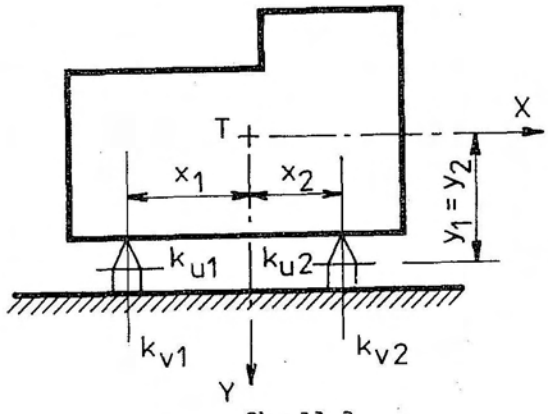
$$\left[k\right] = \begin{bmatrix} k_{vv} & , & k_{vu} & , & k_{v\zeta} \\ k_{uv} & , & k_{uu} & , & k_{u\zeta} \\ k_{\zeta v} & , & k_{\zeta u} & , & k_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}. \quad (11.9)$$



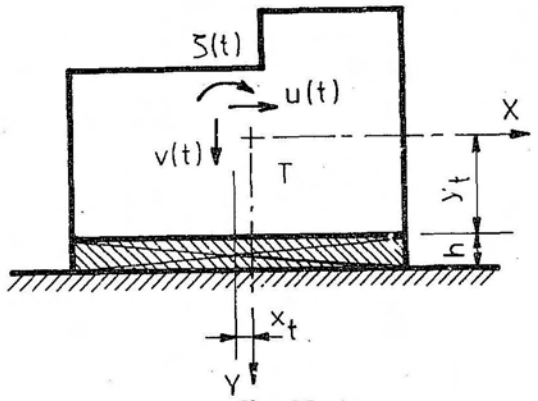
Obr.11.2

Prvky matice tuhosti, čili konstanty tuhosti určíme podle druhu pružného uložení desky. Při uložení desky v rovině na axiálních pérech je třeba nejméně tří axiálních pér, která se neprotínají v tom samém bodě. Pro uspořádání podle obr.11.2 platí vztahy

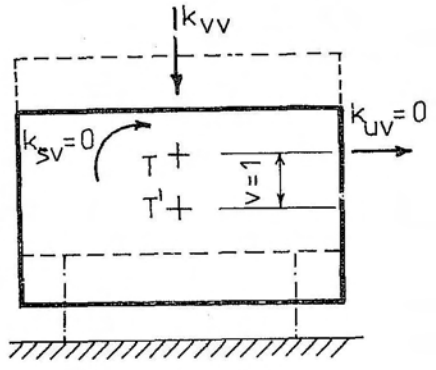
$$\begin{aligned} k_{uu} &= \sum_i k_i \cos^2\alpha_i , \\ k_{uv} &= \sum_i k_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i , \\ k_{u\zeta} &= -\sum_i y_i k_i \cos^2\alpha_i + \sum_i x_i k_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i , \end{aligned} \quad (11.10)$$



Obr.11.3



Obr.11.4



Obr.11.5

$$k_{vv} = \sum_i k_i \sin^2\alpha_i ,$$
$$k_{v\zeta} = \sum_i x_i k_i \sin^2\alpha_i - \sum_i k_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i ,$$
$$k_{\zeta\zeta} = \sum_i y_i^2 k_i \cos^2\alpha_i + \sum_i x_i^2 k_i \sin^2\alpha_i - 2\sum_i x_i y_i \cos\alpha_i \sin\alpha_i .$$

Pro uložení na biaxiálních pérech dle obr. 11.3 platí

$$k_{uu} = \sum_i k_{ui}, \quad k_{vv} = \sum_i k_{vi},$$
$$k_{uv} = 0, \quad k_{v\zeta} = \sum_i k_{vi} x_i, \qquad (11.11)$$
$$k_{u\zeta} = -\sum_i k_{ui} y_i,$$
$$k_{\zeta\zeta} = \sum_i k_{ui} y_i^2 + \sum_i k_{vi} x_i^2 ,$$

kde k_{ui} je tuhost i-tého pera ve vodorovném směru a k_{vi} tuhost i-tého pera ve svislém směru.

Uložíme-li desku na pružnou vrstvu (obr.11.4), platí [25]

$$k_{uu} = \frac{GA}{h}, \quad k_{vv} = \frac{E_k A}{h},$$
$$k_{uv} = 0, \quad k_{v\zeta} = \frac{E_k A}{h} x_t , \qquad (11.12)$$
$$k_{u\zeta} = -\frac{GA}{h} y_t, \quad k_{\zeta\zeta} = \frac{GA}{h} y_t^2 + \frac{EJ}{h} x_t^2 ,$$

kde h je výška pružné vrstvy, A plocha základové spáry, E modul pružnosti v tlaku, G modul pružnosti ve smyku a ν Poissonovo číslo ($\nu < 1$) při označení $E_k = \frac{E}{1-\nu^2}$.

Obdobné vztahy platí pro přibližný výpočet při uložení desky na pružné zemině jako polorovině [25]

$$k_{uu} = k_G A , \quad k_{v\zeta} = k_E A x ,$$
$$k_{u\zeta} = -k_G A y , \quad k_{\zeta\zeta} = k_G A y^2 + k_\varphi J , \qquad (11.13)$$
$$k_{vv} = k_E A ,$$

kde rozeznáváme součinitel pružného rovnoměrného stlačení k_E, součinitel pružného nerovnoměrného stlačení k_φ a součinitel rovnoměrného smyku k_G.

Matice dynamické tuhosti má tvar

$$[A] = \begin{bmatrix} k_{vv} - m\omega_{(j)}^2 , & k_{vu} , & k_{v\zeta} \\ k_{uv} , & k_{uu} - m\omega_{(j)}^2 , & k_{u\zeta} \\ k_{\zeta v} , & k_{\zeta u} , & k_{\zeta\zeta} - I\omega_{(j)}^2 \end{bmatrix} . \qquad (11.14)$$

Uvažujeme dále zvláštní případ, kdy blokový základ souměrný k svislé rovině XY je ještě souměrný k svislé rovině XZ. Matice dynamické tuhosti se zjednoduší na tvar

$$[A] = \begin{bmatrix} k_{vv} - m\omega_{(j)}^2 , & 0 , & 0 \\ 0 , & k_{uu} - m\omega_{(j)}^2 , & k_{u\zeta} \\ 0 , & k_{\zeta u} , & k_{\zeta\zeta} - I\omega_{(j)}^2 \end{bmatrix} , \qquad (11.15)$$

protože při jednotkovém posunutí základu ve směru svislé osy Y (obr.11.5) jsou konstant

tuhosti $k_{uv} = 0, \quad k_{\varsigma v} = 0.$

Při svislém posunutí takto souměrného základu nepotřebujeme již k získání příslušného jednotkového stavu vodorovnou sílu k_{uv} a moment $k_{\varsigma v}$. Soustava tří závislých pohybových rovnic se nám rozpadá na dvě nezávislé soustavy rovnic, první s jednou rovnicí

$$m\ddot{v}(t) + k_{vv}v(t) = 0 \tag{11.16}$$

a druhou se dvěma závislými rovnicemi

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) + k_{uu}u(t) + k_{u\varsigma}\varsigma(t) &= 0, \\ I\ddot{\varsigma}(t) + k_{\varsigma u}u(t) + k_{\varsigma\varsigma}\varsigma(t) &= 0, \end{aligned} \tag{11.17}$$

jako by se soustava se třemi stupni volnosti rozpadla na dvě soustavy; jedna má zde jeden a druhá dva stupně. Proto lze řešit svislé kmitání blokových základů samostatně.

Síly přenášené do podlkladu základu mají dvě složky

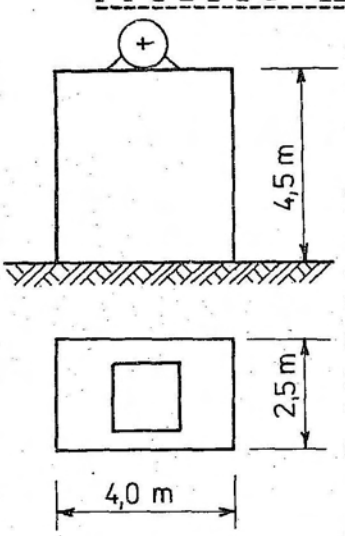
$$\left\{F_p(t)\right\} = \left\{F_{p,st}\right\} + \left\{F_{p,dyn}(t)\right\}. \tag{11.18}$$

Statická složka $\left\{F_{p,st}\right\}$ je dána tíhou soustavy. Dynamická složka

$$\left\{F_{p,dyn}(t)\right\} = \left\{F_{p,d}(t)\right\} + \left\{F_{p,k}(t)\right\} = \left[b\right]\left\{\dot{r}(t)\right\} + \left[k\right]\left\{r(t)\right\} \tag{11.19}$$

působí pouze při chodu stroje.

Příklad 11.1:



Obr.11.6

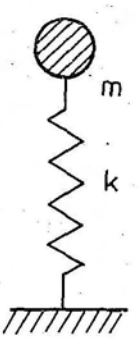
Určete vlastní frekvenci betonového základu tvaru kvádru 2,5.4,0.4.5 m se strojem o tíze 0,08 MN (obr.11.6). Základ spočívá na zemině, jejíž součinitel pružného rovnoměrného stlačení je $k_E = 30$ MN m^{-3}.

Za předpokladu, že nastane pouze posuvný pohyb základu ve svislém směru, jde o soustavu s jedním stupněm volnosti, jejíž výpočtové schéma bude dle obr. 11.7. Plocha základu je $A = 2{,}5.4{,}0 = 10{,}0$ m^2. Tíha základu je $G_Z = 2{,}5.4{,}0.4{,}5.0{,}023 = 1{,}035$ MN. Tíha základu se strojem $G = 1{,}035 + 0{,}08 = 1{,}115$ MN. Součinitel pružného rovnoměrného stlačení zeminy k_E je síla potřebná k zatlačení jednotkové plochy do zeminy o jednotkovou délku. K zatlačení celé plochy základu $A = 10{,}0$ m^2 o jednotku délky bude tedy třeba síly A krát větší

$$k = A\,k_E = 10.30 = 300 \text{ MN } m^{-1}.$$

A to je tuhost soustavy (obr.11.7). Pak bude podle (3.4) vlastní kruhová frekvence

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{300.9{,}81.10^6}{1{,}115.10^6}} = 51{,}4\ s^{-1}.$$



Obr.11.7

A vlastní frekvence $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{51{,}4}{2\pi} = 8{,}18$ Hz.

Příklad 11.2:

Stroj tíhy 50 kN je umístěn na základovém bloku o tíze 250 kN. Stroj působí na základ harmonicky proměnnou silou o amplitudě 20 kN s frekvencí f = 15 Hz. Základ je uložen na 30 pérech (jedno péro má tuhost $k_1 = 150$ kN m^{-1}). Určete výchylku vynuceného ustáleného kmitání. Tlumení neuvažujte.

Tuhost všech pér $k = 150.30 = 4\,500$ kN m^{-1}. Tíha kmitajících součástí $G = 250 + 50 = 300$ kN, takže hmotnost je m = 30 581 kg. Vlastní kruhová frekvence podle (3.4) je $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4500.10^3}{581}} = 12{,}1$ Hz.

Kruhová frekvence harmonicky proměnné síly je $\omega = 2\pi f = 2\pi .15 = 94{,}0$ Hz.

Statické stlačení silou F = 20 kN podle (3.25) má hodnotu

$$v_{st} = \frac{F}{k} = \frac{20}{4500} = 0{,}0044 \text{ m},$$

dynamický součinitel podle (3.23) je $\delta = \frac{v}{v_{st}} = \frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} = \frac{1}{1-(\frac{94}{12,1})^2} = -0,017.$

Výchylka vynuceného ustáleného netlumeného kmitání pak podle (3.22) je

$$v = v_{st}\delta = -4,4.0,017 = -0,0741 \text{ mm}.$$

Příklad 11.3: Určete amplitudu vynuceného ustáleného netlumeného kmitání a sílu, přenášenou do podloží základu o ploše $A = 6,5\ m^2$ a výšce 1,5 m, který je proveden ze železobetonu. Na základu je uložen stroj o tíze 50 kN a působí na základ harmonicky proměnnou silou s amplitudou F = 20 kN, frekvencí f = 15 Hz. Modul stlačitelnosti základové půdy je $k_E = 250\ MN/m^3$.

Tuhost základové půdy vyjde $k = k_E A = 250.6,5 = 1625\ MN\ m^{-1}$. Tíha základu je 6,5.1,5.25 = 243,75 kN, stroje 50 kN. Celková tíha kmitající hmoty G = 293,75 kN.

Vlastní kruhová frekvence má hodnotu podle (3.4)

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1625.10^3.9,81}{293,75}} = 233\ s^{-1}$$

a vlastní frekvence $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{233}{6,28} = 37,1$ Hz.

Statická výchylka je $v_{st} = \frac{F}{k} = \frac{20}{16250} = 0,01235$ mm.

Amplituda výchylky vynuceného kmitání podle (3.22) vychází

$$v = v_{st}\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2} = 1,235.10^{-2}\frac{1}{1-(\frac{15}{37,1})^2} = 1,235.10^{-2}.1,21 = 1,475.10^{-2} \text{ mm},$$

kde dynamický součinitel podle (3.23) je $\delta = 1,21$.

Harmonicky proměnná síla přenášená do podloží má amplitudu $F_p = F\delta = 20.1,21 = 24,2$ kN, nebo podle (11.19) $F_p = k\,v = 1625.10^3.1,475.10^{-5} = 24$ kN.

Na základové spáře bude napětí od vlastní tíly $\sigma = \frac{G}{A} = \frac{293,75}{6,5} = 45,2$ kPa, napětí od staticky působící amplitudy budicí síly $\sigma_{st} = \frac{F}{A} = \frac{20}{6,5} = 3,08$ kPa.

Celkové napětí v základové spáře pak je

$$\sigma_z = \sigma \pm \delta\,\sigma_{st} = 45,2 \pm 1,21.3,08 = \begin{cases} 48,93 \text{ kPa}, \\ 41,47 \text{ kPa}. \end{cases}$$

Příklad 11.4: Určete amplitudu vynuceného kmitání ustáleného netlumeného a sílu přenášenou do podloží u základu se strojem z příkladu 11.3, když pod základ (do základové spáry) je přidána korková deska tloušťky d = 20 cm (obr.11.8), modul pružnosti korku je $E_k = 10$ MPa.

Základový blok se strojem si představíme jako hmotný bod uložený na dvou pružinách zařazených za sebou (obr.11.8). Horní, s tuhostí k_k, představuje pružný korek a druhá s tuhostí k_z, pružnou základovou půdu. Obě pružiny lze nahradit jedinou tuhostí (viz. příklad 3.5) $k_n = \frac{k_k k_z}{k_k + k_z}$,

kde $k_z = k_E A = 250.6,5 = 1625\ MN\ m^{-1}$ a tuhost korku tloušťky d

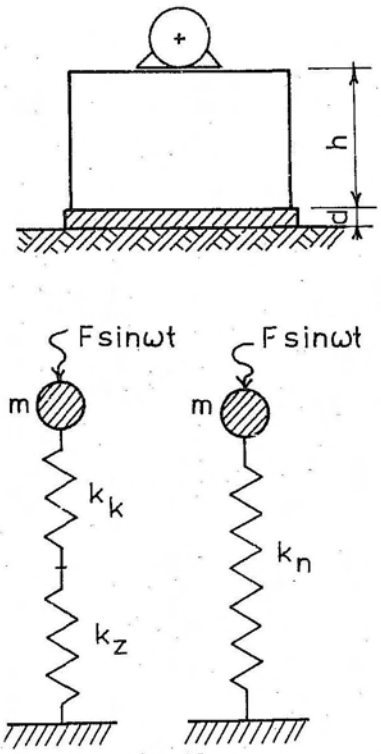
$$k_k = \frac{F}{\Delta d} = \frac{F}{\frac{Fd}{E_k A}} = \frac{E_k A}{d} = \frac{10.6,5}{0,2} = 325\ MN\ m^{-1}.$$

Výsledná tuhost náhradní pružiny je $k_n = \frac{325.1625}{325+1625} = 271\ MN\ m^{-1}$.

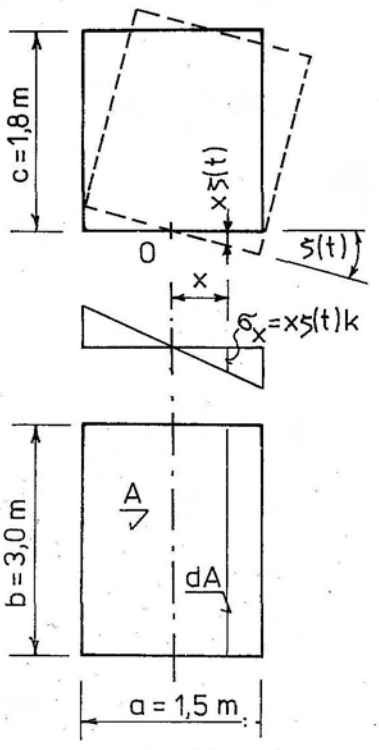
Vlastní kruhová frekvence pak vyjde podle (3.12)

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_n}{m}} = \sqrt{\frac{271.10^3.9,81}{293,75}} = 95,0\ s^{-1}$$

a vlastní frekvence



Obr.11.8



Obr.11.9

$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{95,0}{6,28} = 15,15$ Hz. Dochází zde k rezonanci, neboť kmitočet stroje se rovná kmitočtu základu, který je uložen na korkové desce f = = 15 Hz = f_o = 15,15 Hz. Uložením základového bloku na korkovou desku tloušťky d = = 20 cm jsme snížili vlastní frekvenci na polovinu, proti uložení základu jen na zemině. Dostali jsme se však do oblasti rezonance, síla přenášená do okolí by nesmírně vzrostla.

Základ uložíme na korkovou desku tloušťky je 10 cm. Provedeme znova výpočet vlastní frekvence. Čili

$k_k = \frac{10.6,5}{0,1} = 650$ MN m^{-1},

$k_n = \frac{650.1625}{650+1625} = 464,3$ MN m^{-1}.

$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_n}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{464,3.10^3}{293,75}} =$

= 19,8 Hz.

Ještě jsme dosti blízko rezonance. Vynucené ustálené kmitání netlumené má amplitudu podle (3.22) $v = v_{st}\delta$, kde statická výchylka $v_{st} = \frac{F}{k_n} = \frac{20.10^2}{464,3.10^3} = 0,043$ mm

a dynamický součinitel $\delta = \frac{1}{1-(\frac{f}{f_o})^2} = \frac{1}{1-(\frac{15}{19,8})^2} = 2,35$,

takže v = 0,0043.2,35 = 0,101 mm.

Harmonicky proměnná síla přenášená do podloží $F_p = F\delta = 20.2,35 = 47$ kN.

Příklad 11.5: Určete vlastní frekvenci betonového základu stroje tvaru kvádru 1,5.3,0.1,8 m, je-li možný pouze otáčivý pohyb kolem osy základové spáry. Základ spočívá na zemině o součiniteli pružného rovnoměrného stlačení k_E = 30 MN/m^3 (obr.11.9).

Při pootočení základové spáry o malý úhel ς(t) budou pružné síly zeminy působit na základový blok momentem (obr.11.9)

$$M = \int \sigma_x dA = \int x\varsigma(t)\, k_E x dA = k_E \varsigma(t) \int x^2 dA = k_E \varsigma(t)\, J_o,$$

kde $J_o = \int x^2 dA$ je moment setrvačnosti plochy základu v základové spáře k ose otáčení O. Tím jsme vyjádřili účinek vratných neboli direkčních sil zeminy. Pohybovou rovnici obdržíme při užití d'Alembertova principu jako momentovou výminku k ose otáčení

$$I_o \frac{d^2\varsigma(t)}{dt^2} + k_E J_o \varsigma(t) = 0.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (3.75) plyne, že torzní tuhost zadané soustavy je

$$k_\varsigma = k_E J_o.$$

Kruhová frekvence vlastního kmitání torzního je podle (3.4) $\omega_{o\varsigma} = \sqrt{\frac{k_\varsigma}{I_o}} = \sqrt{\frac{k_E J_o}{I_o}}$.

Provedeme číselný výpočet. Moment setrvačnosti půdorysné plochy základu k ose otáčení O je [5] $J_o = \frac{1}{12}ba^3 = \frac{1}{12}3.1,5^3 = 0,843$ m^4,